
NÈ MIEI DOLCI STUDI M'ACQUETO
EX LIBRIS
CAROLI VIGANÒ

GEOMETRIÆ
PARS VNIVERSALIS,
Inſerviens
Quantitatum Curvarum tranſmutationi & menſuræ.

AVTHORE

IACOBO GREGORIO
ABREDONENSI

SCOTO.



PATAVII, MDCLXVIII.

Typis Heredum Pauli Frambotti, *Superiorum Perm.*

CVM PRIVILEGIO.



PROŒMIVM.





Bseruatum est à nostri seculi geometris mathematicam ab antiquis malè fuisse diuisam in geometriam, arithmeticam, &c, sed potius in vniuersalem & particularem: Matheseos pars vniuersalis tractat de proportione in communi abstrahendo ab omni quantitatis specie, quæ communiter (etiamsi fortassis abusiue) geometria appellatur, cui affinis est recentiorum analytica: matheseos pars particularis diuiditur; in geometriam propriè sic dictam, quæ nihil aliud est nisi matheseos pars vniuersalis figuræ restricta; in arithmeticam, quæ eadem est mathesis vniuersalis numero, et staticam, quæ eadem est motui restricta, &c. ego (ni fallor) idem video in geometria: cum enim obseruarem generalissimos analyseos canones omni problemati inseruire, dummodo possibile sit illos applicare, & analysem nihil aliud esse nisi examinationem quantitatum ignotarum, donec tandem reducantur ad æquationes cum quantitatibus cognitis; cogitabam analyseos defectum (quæ præcipuè apparet in mensuratione

quantitatum curvarum) posse aliquatenus suppleri; si modo e data cuiuscunque figuræ proprietate essentiali, daretur methodus eam transmutandi in aliam æqualem cognitas proprietates habentem, & huius in aliam, & sic deinceps, donec tandem transmutatio fiat in aliquam quantitatem cognitam; sic enim exhiberetur quantitatis propositæ mensura quæsita, non secus quam in æquationis analyticæ resolutione. neque existimo meam opinionem esse frustratam, puto enim hunc tractatulum continere geometriæ partem adeo vniuersalem, vt nullam respuat particularem figuram eorum generum, quæ a geometris adhuc contemplata sunt; quod si alia figurarum genera contemplanda sibi proponant, promouenda est hæc scientia; sicut enim figurarum genera sunt infinita, etiam hæc geometriæ pars, sicut omnis alia, infinita erit; nihilominus multo breuius & elegantius erit vniuersalem doctrinam unicuique particulari casui secundum figuræ proprietates applicare, quam de vnaquaque figura integrum uolumen euulgare. Huius methodi studiosus ante omnia versatus esse debet in analyse, nam absque illa, cuiusvis ingenii vires superat, propositæ cuiuscunque figuræ proprietates examinare.

Non diffiteor me legisse apud præstantes geometras multa talis methodi vestigia, sed plerumque vel particulariter vel parum geometricè demonstrata; quæ mea sunt & quæ aliena iudicet lector, qui hunc tractatulum cum aliorum comparauerit, ego enim nihil affirmo, ne videar ea mihi adscribere, quæ ab alijs (me etiam inscio) antea reperta sunt: Demonstrandi methodo utor (ni fallor) mihi peculiari, quippe multo

bre-

breuiore quam Archimedea & non minus geometrica; utor quoque in propositionibus magis obviis methodo Caualleriana, quæ etiam nullo negotio reducitur ad Archimedeam vel nostram. Quod si geometra, post diligentem huius methodi applicationem secundum figuræ proprietates, nullum inueniat problematis exitum; recurrendum est ad seriem convergentem, cuius terminatio sit ipsa figura incognita vel alia ad eam in ratione data; ob hanc enim rationem, conatus sum aliarum figurarum proportiones reducere ad proportionem inter figuras planas, in his enim existimo faciliorem esse serierum conuergentium doctrinam: non tamen audeo affirmare seriem conuergentem semper posse inveniri; suspicor enim hanc methodum esse insufficientem ad omnes proportiones non analyticas inueniendas: utcunque nostrum tractatulum de vera circuli & hyperbolæ quadratura volumus esse ultimum nostræ methodi refugium, nam serierum convergentium doctrina est generalis, quæ e figuræ proprietatibus semel inuenta solutionem possibilem exhibebit; & proinde obiectionibus contra nostram doctrinam hic satisfaciamus.

Primo obiicitur contra titulum, nempe tractatum meum male appellari veram circuli & hyperbolæ quadraturã, cum potius sit conatus demonstrandi illam esse impossibilem; respondeo, si esset impossibilis, nulla daretur proportio inter circulum & diametri quadratum, & ideo falsa esset 5 definitio lib. 5. Euclidis; si autem sit possibilis, monstrandus est nostræ error, si nostra vera non sit. Alii sic obiiciunt: hæc quadratura nulla est, quoniam non assignatur proportio inter cir-

culum & diametri quadratum ; huic obiectioni respondeo: posito circuli diametro b, *erit ipse circulus terminatio seriei conuergentis, cuius primi termini sunt* $\frac{b^2}{2}$, b^2, *& secundi* $Vq\frac{b^4}{2}$, $\frac{2b^4}{b^2 + \sqrt{q2b^4}}$ *; & proinde quadratum diametri est ad circulum ut* b^2 *ad prædictam terminationem, quæ terminatio nobis nullo modo est magis incognita quam radix surdesolida numeri 40. dicunt alii non bene esse demonstratum (in scholio prop. 5) sectorem A B I P eundem esse cum terminatione seriei conuergentis, cuius primi termini sunt triangulum ABP & trapezium ABFP, & secundi, rectilinea ABIP, ABDLP: & proinde plenam demonstrationem hic subiicio: si sector & prædicta terminatio non sunt æquales, sit inter illas differentia Z; & producatur series conuergens donec termminorum conuergentium (nempe P & Q) differentia sit minor quam Z, euidens enim est (ex prop. 6.) hoc fieri posse; hisce positis, patet tam sectorem quam seriei terminationem consistere inter terminos P & Q; & proinde quatuor sunt quantitates, quarum maxima & minima sunt P & Q, intermediæ autem sector & terminatio seriei, eritque differentia intermediarum nempe Z maior quam differentia extremarum, quod est absurdum, nulla ergo est differentia inter sectorem & seriei terminationem, & proinde æquales sunt, quod demonstrandum erat. Alii obiiciunt contra prop. 11. ita; si addatur* a^3 *termino* $a^3 + a^2b$ *& termino* $ba^2 + b^2a$, *eneruetur vis utriusque demonstrationis; respondeo* a^3 *esse quantitatem in-*

defi-

definitam & alias quantitates indefinitas præter ipsos terminos conuergentes compositionem non posse ingredi, quod analystam latere non potest. Obiiciunt alii: hac eadem methodo potest demonstrari inter duas quantitates indefinitè commensurabiles P, Q, non posse inueniri mediam proportionalem illis commensurabilem, quod tamen est falsum si P, Q, sint planosimiles; respondeo maximam esse discrepantiam inter radicum extractionem & sextam illam operationem, nam in radicum extractione, cum diuisor diuidendum metitur, quod in prædicto casu euenit, radicis extractio coincidit cum quatuor operationibus prioribus, sexta autem operatio, cum ex natura sua sit infinita, cum prioribus nunquam coincidit. Obiicit quidam non vulgaris geometra circuli quadraturam ope quadraticis peractam esse operationibus analyticis; quod omnino nego desiderando ab affirmante, vt illas operationes analyticas assignet, ego enim existimo basem quadraticis non esse magis assignabilem ab operationibus analyticis, quam radicem quadratam binarij à primis quatuor operationibus arithmeticis.

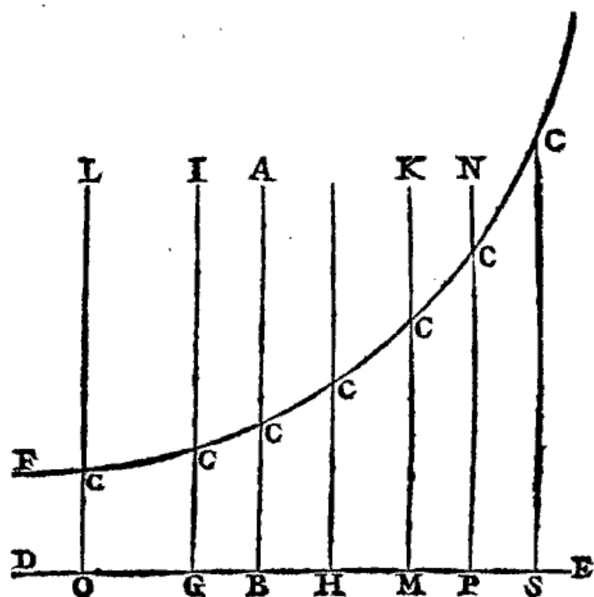
Solutis obiectionibus quæ contra nostram doctrinam vel ab aliis afferuntur vel a me imaginari possunt, satisfaciamus etiam illis, qui operationibus organicis delectantur. Si quis velit organicè circulum quadrare vel angulum in ratione data diuidere; non existimo ullum modum esse simpliciorem quam vulgaris linea quadratrix in materia aliqua solida & plana accurate & punctatim descripta. Quod ad quadraturam hyperbolæ attinet; existimo satis facile esse trianguli,

guli, seu trapezij inscripti (sunt enim inter se æqualia) ad triangulum circumscriptum rationem in rectis exhibere, & ab illis rectis seriem debitam conuergentem continuare, donec conueniens fuerit approximationem adhibere. Omnia quæ desiderari poßunt de logorithmis & rationum compositione ope sequentis curuæ nullo negotio inueniri poßunt.

Sit linea recta D E, sitque alia recta illi normaliter insistens AB, in qua sit punctum mobile C, quod punctum C moueatur ea ratione, vt, dum perpendicularis mouetur versus E vel D normaliter semper insistens rectæ E D, interceptæ inter punctum C & rectā D E sint ad ipsam C B in rationibus inter se multiplicatis in ratione motus rectæ perpendicularis A B: e.g. moueatur A B in K M & N P; oportet ut punctum C moueatur ea lege, vt ratio CP ad CB sit multiplicata rationis CM ad C B in ratione PB ad M B: eodem modo ad partes D, supposito A B moueri in IG & LO, vt punctum C ea lege moueatur, ut ratio CO ad CB sit multiplicata rationis CG ad CB in ratione O B ad G B: atque è recta DE & duobus punctis curuæ quæsitæ a motu puncti C descriptæ ad libitum datis, facile est curuam ipsam punctatim describere, e.g. supposito curuam in rectis A B, K M, transire per punctum C, oportet alia huius curuæ puncta inuenire: diuidatur B M bifariam H, sitque perpendicularis H C media proportionalis inter B C, M C; dico C esse vnum ex punctis quæsitis, est enim ratio C M ad C B duplicata rationis C H ad C B, & recta M B est dupla rectæ B H, est igitur C in curua quæsita. Deinde sit recta S M æqualis rectæ M B, &

ut

ut CB ad CM ita CM ad perpendicularem C S, ut prius demonstratur C eße punctum curuæ quæsitæ; atque hac ratione possunt inueniri puncta quotlibet, & curua quantumlibet produci. Notandæ sunt quædam huius curuæ proprietates exi-



*miæ, quæ nullo negotio deprehenduntur; prima est, quod ex vtraque parte posit produci in infinitum; secunda, quod ex vna parte nempe F, licet rectam E D semper magis appropinquet, nunquam tamen cum illa concurrat, efficiens spatium ex parte **F** D finitum in quantitate etiamsi infinitum in*

lon-

longitudine ; tertia , quod , poſita vna perpendicularium ſeu ordinatim applicatarum loco vnitatis , & reliquis loco numerorum , intercepta recta in D E ſeu curvæ aſymptota inter vnitatem & numerum ſemper ſit logorithmus numeri ; e.g. poſita C O vnitate & C G binario , item CB ternario, C H quaternario , &c ; erit O G logorithmus binarii , O B ternarij , O H quaternarij , &c . Si deſcribatur hæc curua exactè in plano ſolido , non ſolum eius ope cum regula & circino inuenientur inter datas duas rectas quotcunque mediæ proportionales , ſed omnia problemata imaginabilia de rationum compoſitione etiam facile perfici poſſunt ; ſed hæc , quoniam facilia ſunt , conſultò omitto , lectorem interim admonens ſpatium , contentum à portione prædictæ curuæ , ſua aſymptota & duabus ordinatim applicatis , non habere rationem analyticam ad rectangulum illi inſcriptum , ſicut demonſtrari poßet ſecundum tenorem prop. I I. prædicti tractatuli.

Hæ operationes non exiſtimari debent ageometricæ , quoniam ſola ope regulæ & circini non perficiuntur , ſicut optime obſeruat ſubtiliſſimus Mathematicus D. Carolus Renaldinius in geometra ſuo promoto , dum tractat de nouis illis lineis , quas Mediceas appellat ; quod ut clarius fiat , hic conabor oſtendere nullam vel æquationem cubicam poſſe reſolvi ope ſolius regulæ & circini : omnis æquatio cubica habet vel vnam ſolam vel tres radices reales , quæ ſi inuenirentur ope ſolius regulæ & circini , ſeu interſectione circuli & lineæ rectæ , linea recta circulum ſecaret vel in uno

ſolo

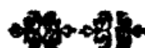
solo puncto vel in tribus, quod utrumque est absurdissimum: ob similem etiam rationem, æquatio cubica tres habens radices reales nunquam potest reduci ad puram, quæ unicam tantum habet: nam in his æquationis reductio nullo modo proficiet, cum impossibile sit eius ope radicem imaginariam in realem mutare vel è contra.



METHO-

METHODVS VNIVERSALIS

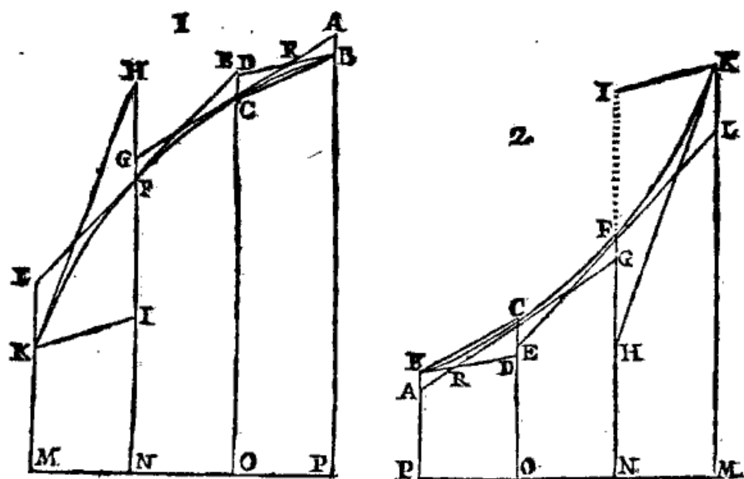
Transmutandi, & mensurandi quantitates curvas.



PROP. I. THEOREMA.

Sit curva quæcunque KB simplex & non sinuosa, hoc est à K ad B, rectam quandam positione datam M P semper appropinquãs, vel semper ab illa recedens. Sit (in prima figura) punctum in curva KB rectę M P maxime propinquum, K. ex duobus quibuscunque punctis curvę KB, nempe C, B, demittantur perpendicularis CO, BP, in rectam M P, & à puncto curvæ C, vtpote puncto K proximiore ducatur recta CA curvam tangens in C, & PB productę occurrens in A. dico rectam CA majorem esse curva CB. curvam tangens in B, & rectę CA occurrens in R, & OC productę in D, ducatur recta BRD. quoniam in progressu a K ad B, curva KB semper magis elongatur a recta P M, igitur recta BD curvam tangens in puncto B, & vergens versus K e contra tendit ad concursum cum recta PM, & ideo angulus ABR est obtusus, superans nempe rectum MPB illo angulo, in quo cum PM producta concurrit, est igitur angulus ABR major angulo RAB, & latus AR maius latere BR, & commune addendo, recta AC maior est rectis BR, RC. sed BR, RC, curvam tangentes in punctis B, C, sunt maiores arcu BC; & ideo AC recta eodem arcu CB est multo maior, quod demonstrare opportuit.

Secundo dico BD rectam minorem esse curva BC. ex hactenus demonstratis, angulus ABD est obtusus; & proinde etiam, ob parallellas AP, DO, illi æqualis CDB, & ideo ducto subtendente CB, angulus BDC maior est angulo BCD, & recta DB minor recta BC, sed recta BC minor est curva BC, & ideo recta BD multo minor est curva BC. ex



punctis extremis K, B, in rectam MP demittantur perpendiculares KM, BP; deinde diuidatur recta MP in partes quotcunque æquales MN, NO, OP, & à punctis P, O, N, M, erigantur perpendiculares PA, OE, NH, ML, curvam secantes in punctis B, C, F, K, in quibus singulis ducantur rectę curvam tangẽtes versus B a perpendicularibus proximis terminatę, nempe KH, FE, CA, & in puncto B sit tangens BD a perpendiculari proxima versus K terminata in D, sitque rectę BD parallella KI: manifestum est KH maiorem esse recta KI ob angulum HIK obtusum æqualem angulo ABD.

Dico omnes rectas KH, FE, CA, simul maiores esse curva

KB

KB & excessum rectę HK supra rectam KI maiorem esse excessu omnium rectarum KH,FE,CA, simul supra curvam KB. producantur tangentes AC, EF, ad proximas perpendiculares versus K in G & L. ex primo proposito, AC est maior curva BC, EF maior curva FC, & HK maior curva KF; & ideo omnes simul KH, FE, CA, sunt maiores integra curva KB: deinde ex secundo proposito BD, hoc est, KI minor est curva BC; & CG, hoc est, CA minor est arcu FC; & LF, hoc est, FE minor est arcu KF; & ideo omnes KI, FE, CA, simul sunt minores integra curva KB; & ideo maior est excessus rectarum KH, FE, CA, supra rectas KI, FE, CA, quam supra curvam KB; sed rectę FE, CA, sunt communes utrique rectarum summę; & ideo excessus rectę KH supra rectam KI est æqualis excessui summæ rectarum KH, FE, CA, supra summam rectarum KI, FE, CA; qui demonstratus est maior excessu rectarum KH, FE, CA, supra curvam KB, quod demonstrandum erat. Si vera curva fuerit convexa ad rectam MP, vt in secunda figura, K debet esse punctum curvæ a recta MP maxime remotum, & aliquot demonstrationū verba sunt mutanda, sicut per se intelliget industrius Lector.

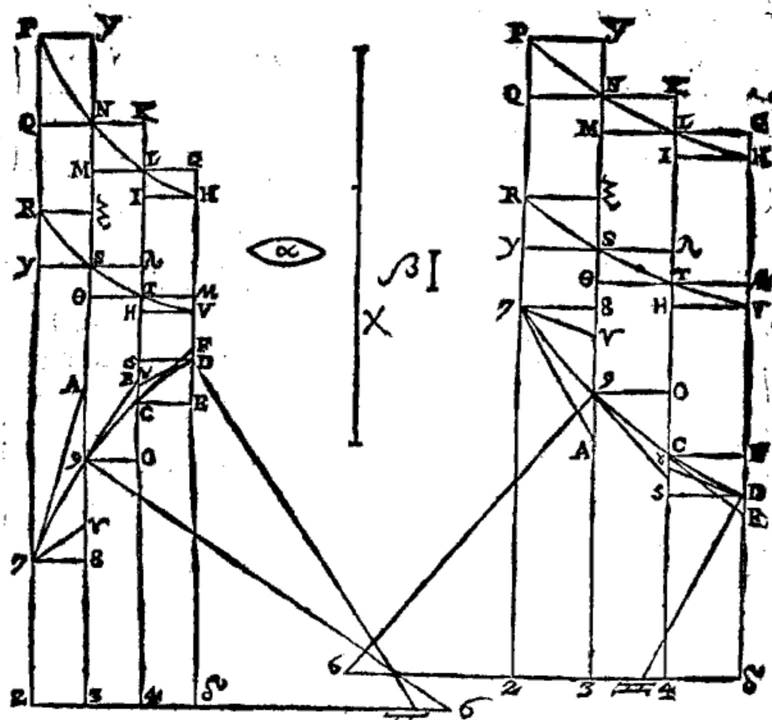
PROP. 2. THEOREMA.

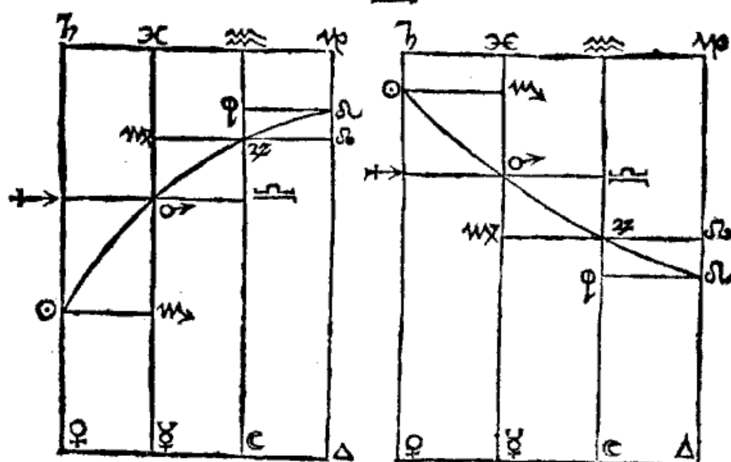
SIt curva quæcunque 79 CD simplex, seu non sinuosa (si enim fuerit sinuosa, oportet illam in plures simplices diuidere) super qua imaginetur superficies cylindrici recti, cuius altitudo recta X. a puncto quolibet curuæ nempe 9 in quamlibet rectam nempe 26 demittatur recta perpendicularis 93. & ducatur in eandem 26 recta 96 curvam perpendiculariter secans in puncto 9. producatur recta 39 in S, ut 3S fiat æqualis rectę 96, idem quoque supponatur fieri in omnibus punctis curvæ 79 CD, ita vt ex rectis in curvam perpendicularibus per propria sua curvę puncta ad rectam 26 normaliter protractis confletur spatium RV 82 à

curva RSTV & rectis R 2, V δ, δ2, comprehensum. Deinde fiat ut 93 ad S3 ita X altitudo cylindrici ad 3 N; idem fieri supponimus in omnibus aliis rectis spatii RV δ2 rectę 2δ perpendicularibus, ut compleatur spatium PH δ2 comprehensum a curva PH & rectis Hδ, P 2, 2δ. hoc est intelligo duo mixtilinea esse descripta, quorum primi hæc est proprietas, ut ex eius curvæ puncto quocunque S in rectam 26 demissa perpendicularis S3 sit æqualis perpendiculari ad curvam 79 CD in puncto transitus 9 nempe 96. secundi vero hæc sit proprietas, vt ex eius curvæ puncto quocunque N in rectam 26 demissa perpēdicularis N3 sit ad altitudinem cylindrici X, vt eius pars intercepta in primo mixtilineo S3 ad eius partem interceptam à curva data 93. dico mixtilineum secundum PH δ2 esse æquale superficiei cylindrici recti, cuius basis est curva data 79 CD, & altitudo recta X. Si mixtilineum PH δ2 non est æquale superficiei cylindrici prædicti, inter illas erit aliqua differentia, quæ sit α planum: applicetur α planum ad rectam X, sitque latitudo inde oriens β. ducatur ex puncto 7 recta 7 A curvam 7 D tangens in pūcto 7, & ex puncto D ducatur recta Dγ curvam tangens in puncto D, sitque rectę D γ parallella 7 γ, & ex punctis 7, D, in rectam 26 demittantur perpendiculares 72, δD; dividaturque recta 2δ in tot partes æquales, ut ab extremitate earum primæ erecta perpendiculari 3 A, excessus tangentis abscissæ 7 A supra parallellam abscissam 7 γ sit minor recta β, hoc enim semper fieri posse manifestum est, si tangens 7 A non sit perpendicularis rectę 2 δ, nec curva data sinuosa. a diuisionum punctis 2, 3, 4, δ, excitentur perpendiculares 2 P, 3 N, 4 L, δH, curvam datam secantes in punctis 7, 9, C, D; curvam primā inventam secantes in punctis R, S, T, V, & secundam in punctis P, N, L, H; deinde curvam datam tangentes in punctis 7, 9, C, D, ducantur rectæ 7 A, 9 B, CF, Dγ, a proximis perpendicularibus terminatæ, sintque rectæ 78, 90, CE, D5, YP, NK, LG, HI, LM, NQ, ipsis partibus æquali-

bus

bus æquales & parallellæ, à perpendicularibus proximis terminatæ. Angulus B 96 est rectus ob 9 B tangentem, & illi perpendicularem 96; angulus quoque O 93 est rectus, & ideo communem angulum O 96 auferendo, relinquitur angulus O 9 B æqualis angulo 693; triangula igitur rectangula O9B, 693, sũt similia, & proinde ut 93 ad 96 ita 9O ad 9B, sed ut 93 ad 96 ita X ad 3N; & ideo ut 9O ad 9B ita X ad 3 N; & igitur rectangulum 9 O in 3N nempe rectangulum N4 est æquale rectangulo 9B in X: eodẽ modo demonstratur rectangulum P 3 esse æquale rectangulo 7 A in X, item rectangulum Lδ esse æquale rectangulo CF in X; & ideo rectangulum rectæ X in rectas 7 A, 9 B, C F, simul, est æquale toti rectilineo 2PYNKLGδ; est ergo rectangulum X in rectas 7A, 9B, CF, simul, maior mixtilineo P N L H δ2. curvæ in puncto D fiat normalis D♊, & ideo rectus est angulus ♊D♉, sed rectus quoque est angulus δD5, & proinde commune auferendo nempe δD♉, relinquũtur anguli æquales δD♊, ♈D5; sunt ergo triangula rectangula δD♊, ♈D5, similia; & ideo ut δD ad D♊, hoc est D5 ad D♉ ita X ad δH, & ideo rectangulum δH in D5, hoc est rectangulum H4, æquale est rectangulo X in D♉, hoc est, X in 7 ♈; sed rectangulum M4 est æquale rectangulo L δ, hoc est rectangulo X in CF; & rectangulum Q3 est ęquale rectangulo N4, hoc est rectangulo X in 9 B; & igitur rectilineum QNMLIHδ2 est æquale rectangulo X in rectas FC, B9, ♈7, simul; ęst ergo rectangulum X in rectas FC, B9, ♈7, simul, minor mixtilineo PNLH δ2. porro rectæ FC, B9, A7, simul, sunt maiores curva 79CD, & rectæ FC, B9, ♈7, simul, sunt eadem curva minores, quod utrumq; patet ex antecedente; & igitur rectangulum X in rectas FC, B9, A7, maius est cylindrica superficie super curva 79CD, & rectangulum X in rectas FC, B9, ♈7, eadem superficie minus: sed demonstratum est rectangulum X in rectas FC, B9, A7, maius esse mixtilineo PNLHδ2, & rectangulum X in rectas FC, B9, ♈7, eodem mixtilineo esse minus, & pro-





proinde maior est differentia inter hæc rectangula, quã inter superficiem cylindricam & mixtilineum; sed rectangulorum differentia est rectangulum X in differentiam rectarum 7A, 7γ; est autem differentia rectarum 7A, 7γ, minor recta β ex suppositione; & ideo differentia inter rectangula X in FC, B9, A7, simul, & X in FC, B9, γ7, simul, minor est quantitate α, nempe facto ab X in β, hoc est ex positione, differentia inter superficiem cylindricam & mixtilineum, quod est absurdum, ostensa enim est maior, superficies igitur cylindrica & mixtilineum sunt æqualia, quod demonstrandum erat.

Quod si curua 7D non fuerit simplex sed sinuosa, dividenda est in plures simplices, & demonstratio in vnaquaque seorsim instituenda.

Si vero tangens 7A fuerit perpendicularis ad rectam 7 8, mixtilineum PNLHδ2 extendetur in infinitum ad partes P: hoc tamen non obstante; dico adhuc mixtilineum PNLHδ2 æquale esse superficiei cylindrici recti super curva 79 CD, cuius altitudo X. Si non sunt æqualia, sit (si fieri potest) mixtilineum maius superficie, & recta N3 rectæ Hδ parallella abscindatur mixtilineum NLHδ3 æquale superficiei super curua 79CD, hoc enim absque dubio fieri potest: eodemque modo, quo ante, demonstratur mixtilineũ NLHδ3 æquale esse superficiei super 9CD; sunt ergo æquales, superficies cylindrici recti cuius altitudo X, super curvis 9CD, 79CD, quod est absurdum; mixtilineum ergo PNLHδ2 non est maius dicta superficie cylindrica: sit (si fieri potest) minus; & abscindatur 9D curva, ita ut superficies cylindrici recti super 9D existens, æqualis fiat mixtilineo PNLHδ2, & ducatur 3 9 N rectæ H δ parallella: demonstratur ut ante superficiem cylindrici recti super 9D existentem, æqualem esse mixtilineo NLHδ3; sed ex suppositione eadem superficies cylindrici recti æqualis est mixtilineo PNLHδ2; mixtilinea ergo PNL Hδ2, NLHδ3, sunt inter se æqualia, quod est absurdum; & ideo mixtilineum non est minus superficie,

sed

ſed etiam demonſtratum eſt, nec eſſe maius, ſuperficies igitur cylindrici recti ſuper curva 7D cuius altitudo eſt X, æqualis eſt mixtilineo PNLH♂2, etiam quando tangens 7A rectæ 78 eſt perpendicularis, quod demonſtrandum erat.

Ex demonſtratione manifeſtum eſt mixtilineũ PNLH♂2 & ſuperficiem cylindricam ſuper curva 79CD eſſe quantitates magnitudine & gravitate analogas, quoniam eadem æqualitas quæ demonſtratur de integris, eodem modo demonſtratur de partibus earum proportionalibus; & ideo earum centra æquilibrii eodem modo dividunt rectam 2♂; ſed ipſa curva 7D eſt magnitudine & grauitate analoga cum ſuperficie cylindrica; & ideo curva eſt etiam magnitudine & gravitate analoga cum mixtilineo idem cum reliquis centrum habens æquilibrii in recta 2♂. perſpicuum quoque eſt mixtilineum PNLH♂2 eſſe ad rectangulum X. in 2♂, ut curua 79 CD ad rectam 2♂.

PROP. 3. THEOREMA.

EIſdem poſitis quæ prius; ſupponatur prædicta ſuperficies cylindrici recti ſuper curva 79DC ſecari a plano per rectam 2♂ tranſeunte, & in angulo ſemirecto ad planum D♂2 inclinante. inferiorem ſuperficiei cylindricæ partem a plano ſectam apellamus trunci ſuperficiem. Dico trunci ſuperficiem æqualem eſſe mixtilineo RSTV♂2. ſupponatur extendi curva 79CD in rectam ſibi æqualem ♀ ☿ ● △, & iungatur recta △ ♑ æqualis rectæ X, ut compleatur rectangulum ♄ ♑ △ ♀, quod neceſſario æquale eſt tam ſuperficiei cylindrici quam mixtilineo PNLH♂2. Sit ♀ ☼ æqualis rectæ 27, & a puncto ☼ ducatur curva ☼ ♂ ♃ ☊ talis naturæ, ut ſumpta recta quacunque ♀ ☿ ęquali curvæ particulæ cuicunque nempe 79, perpendicularis ad rectam ♀ △ ex puncto ☿ in curvam ☼ ☊, nempe ☿ ♂, fiat æqualis perpendi-

diculari ex puncto 9 in rectam 2♂, nimirum 93: manifestum est mixtilineum ☼♂♃♌△♀ esse æquale superficiei trunci, quoniam inclinatio plani secantis supponitur esse angulus semirectus: nostrum ergo est demonstrare æqualitatem mixtilineorum RSTV♂2, ☼♂♃♌△♀: primo nos hanc æqualitatem demonstrabimus in postremis figuris, vbi supponimus curvam RV in progressu ab R ad V rectam 2♂ semper magis appropinquare, & etiam curvam 7 D in progressu a 7 ad D ad eandem rectam magis appropinquare; & ideo curva ☼♌ in progressu a ☼ ad ♌ eo magis appropinquat rectam ♀△, quoniam eodem modo appropinquat curva ☼♌ rectam ♀△, quo 7 D rectam 2♂. Si prædicta mixtilinea non sunt æqualia, sit inter illa α differentia: & mixtilineum RV♂2 diuidatur à tot rectis rectæ R 2 parallellis, nempe S3, T4, V♂, R2, ut ab earum cum curva intersectionibus R, S, T, V, utrinque ductis ad parallelas proximas perpendicularibus Rξ, Sγ, Sλ, Tθ, Tμ, Vn, fiant duo rectilinea, nempe RξSλTμ♂2 extra mixtilineum & γSθTnV♂2 intra mixtilineum, quorum differentia sit minor quam α, evidens enim est hoc fieri posse. producantur rectæ S3, T4, ut utrasque curvas PH, 7 D, intersecent in punctis N, L, 9, C, & iungantur parallellæ, rectæ 2♂, PY, NQ, NK, LM, LG, HI, a rectis mixtilineum diuidentibus terminatæ. Deinde diuidatur rectangulum ♄△ a rectis, rectæ ♑△ parallelis, ♄♀, ♃☿, ♒◉, ♑△, in rectangulũ ♄☿ æquale mixtilineo PN32, rectangulum ♃◉ æquale mixtilineo NL43, & rectangulum ♒△ æquale mixtilineo LH♂4: & ab intersectionibus rectarum rectangulum ♄△ dividentium cum curva ☼♌, nempe ☼, ♂, ♃, ♌, ducantur perpendiculares vtrinque in dividentes proximas, nempe ☼✸, ♂♃, ♂♎, ♃♍, ♃☊, ♌♁, ita ut ♃♈♍♃♁♌△♀ fiat rectilineum intra mixtilineum, & ☼✸♂♎♃☊△♀ fiat rectilineum eidem mixtilineo circumscriptum. Patet ex antecedente P2 esse ad X seu ♄♀, ut R2 ad 72 seu ☼♀, & permutando ut P2 ad R2 ita ♄♀ ad ☼♀; & ideo ut P3 ad R3 ita ♄☿ ad ☼☿; sed

B re-

rectangulum ♄☿ est æquale mixtilineo PN3 2; & ideo permutando, ut P3 ad mixtilineum ita R3 ad ☼☿, cumque P3 sit maior mixtilineo, erit R3 maior quam ☼☿: eadem methodo demonstratur S4 rectangulum esse maius quam ♂●, & Tδ maius quam ♃△; est ergo rectilineum RξSλTμδ2 maius rectilineo ☼✱♂♎♃♌△♀. Eodem modo ut N3 ad X seu X☿ ita S3 ad 93 seu ♂☿. & permutando, vt N3 ad S3 ita X☿ ad ♂☿, hoc est ut Q3 ad γ3 ita ♄☿ seu mixtilineum PN 32 ad ♁☿, & permutando ut Q3 ad mixtilineum PN32 ita γ3 ad ♁☿, sed Q3 est minus mixtilineo, & ideo γ3 est minus quam ♁☿; eodem modo demonstratur θ4 esse minus quam ♍●, & ηδ minus quam φ△: & ideo rectilineum γSθTηVδ2 minus est rectilineo ♁♂♍♃φ♌△♀; & proinde ambo rectilinea ☼✱♂♎♃♌△♀. ♁♂♍♃φ♌△♀ consistunt inter duo rectilinea RξSλTμδ2, γSθTηVδ2, hoc est maius priorum rectilineorum minus est maiore secundorum, & minus priorum maius minore secundorum; sed mixtilineum ☼♂♃♌△♀ consistit inter duo priora, & ideo consistit etiam inter duo posteriora nempe RξSλTμδ2, γSθTηVδ2, sed mixtilineum RSTVδ2 consistit etiam inter hæc rectilinea, & proinde maior est differentia rectilineorum RξSλTμδ2, γSθTηVδ2, quam mixtilineorum RSTVδ2, ☼♂♃♌△♀; sed ex positione differentia rectilineorum est minor quam α, & proinde differentia mixtilineorum est multo minor quam α, quod est absurdum, ponitur enim æqualis; non igitur differunt mixtilinea RSTVδ2, ☼♂♃♌△♀, sed æqualia sunt, quod demonstrare oportuit.

Secundo nos eandem æqualitatem demonstrabimus in primis figuris, vbi supponimus curvam RV in progressu ab R ad V rectam 2δ semper magis appropinquare, & econtra curvam 7D in progressu a 7 ad D ab eadem recta magis elongari; & ideo curva ☼♌ in progressu a ☼ ad ♌ eo magis elongatur a recta ♀△, quoniam eodem modo elongatur curva ☼♌ a recta ♀△, quo curva 7D a recta 2δ. Si prædi-

ĉta mixtilinea non sunt æqualia, sit eorum differentia α: deinde mixtilinea RSTVδ2, ☼♂♃♌△♀, dividantur à rectis perpendicularibus ad eorum bases 2δ, ♀△, omnino ut in antecedente demonstratione factum est, hac tamen lege ut differentia rectilineorum RξSλTμδ2, γSθTηVδ2, item & differentia rectilineorum ♆♂♍♃φ♌△♀, ☼✱♂♎♃☊△♀, simul, sint minores quantitate α; manifestum est enim hoc esse possibile, cum hæc divisio in infinitum fieri possit. eadem methodo, qua in priore demonstratione vsi sumus, demonstratur rectilineum RξSλTμδ2 maius esse rectilineo ☼✱♂♎♃☊△♀, & rectilineum γSθTηVδ2 minus esse rectilineo ♆♂♍♃φ♌△♀. Hisce intellectis, si data mixtilinea non sunt æqualia, sit RSTVδ2 maius altero: manifestum est excessum rectilinei RξSλTμδ2 supra rectilineum ☼✱♂♎♃☊△♀ æqualẽ esse omnibus rectãgulis γξ, θλ, ημ, ♆✱, ♍♎, φ☊, simul, sublato excessu rectilinei ♆♂♍♃φ♌△♀ supra rectilineum γSθTηVδ2; sed excessus mixtilinei maioris supra mixtilineum minus, est minor dicto excessu rectilineorum, quoniam mixtilineum maius est minus rectilineo maiore, & mixtilineum minus est maius rectilineo minore; & ideo excessus mixtilinei maioris supra mixtilineum minus, minor est dictis rectangulis simul, sublato excessu rectilinei ♆♂♍♃φ♌△♀ supra rectilineum γSθTηVδ2; sed dicta rectangula simul ex hypothesi minora sunt quantitate α, & ideo dicta rectangula simul sublato dicto excessu multo minora sunt quantitate α; & proinde mixtilineum maius excedit minus multo minore excessu quam α, quod est absurdum, ponitur enim α excessus mixtilinei maioris supra minus; non est ergo mixtilineum RSTVδ2 maius mixtilineo ☼♂♃♌△♀: sit (si fieri potest) minus; manifestum est excessum rectilinei ♆♂♍♃φ♌△♀ supra rectilineum γSθTηVδ2 æqualem esse omnibus rectangulis ♆✱, ♍♎, φ☊, γξ, θλ, ημ, simul, sublato excessu rectilinei RξSλTμδ2 supra rectilineum ☼✱♂♎♃☊△♀;

ſed exceſsus mixtilinei maioris ☼♂♃☊△♀ ſupra mixtilineum minus RSTVδ2, eſt minor dicto exceſsu rectilineorum, quoniam mixtilineum maius eſt minus rectilineo maiore & mixtilineum minus eſt maius rectilineo minore; & ideo exceſsus mixtilinei maioris ſupra minus minor eſt dictis rectangulis ſimul ſublato exceſsu rectilinei RξSλTμδ2 ſupra rectilineum ☼✱♂♎♃☋△♀; ſed dicta rectangula ſimul, ex hypotheſi, minora ſunt quam α; & ideo dicta rectangula ſimul ſublato dicto exceſsu multo minora ſunt quam α; & proinde mixtilineum maius excedit minus multo minore exceſsu quam α, quod eſt abſurdum, ponitur enim α exceſsus mixtilinei maioris ſupra minus; non eſt ergo mixtilineum ☼♂♃☊△♀ maius mixtilineo RSTVδ2, ſed demonſtratum eſt etiam nec eſſe minus; ſunt igitur mixtilinea ☼♂♃☊△♀, RSTVδ2, inter ſe æqualia, quod demonſtrandum erat.

Sunt etiam alii huius theorematis caſus, quibus omnibus poteſt applicari hæc ſecunda demonſtratio; volui tamen priorem etiam adhibere, quoniam mihi apparet ſimplicior, etiamſi non ſit generalis; lectorem tamen admoneo illam priorem poſſe adhibere in caſu maxime ordinario, nempe in figuris prioribus, reliquis manentibus dum curva RV in progreſſu ab R ad V magis a recta 2δ elongatur.

Ex demonſtratione manifeſtum eſt mixtilineum RSTVδ2 & ſuperficiem trunci eſſe quantitates magnitudine & gravitate analogas, quoniam eadem æqualitas quæ demonſtratur in integris, eodẽ etiam modo demonſtratur in partibus earum proportionalibus; & ideo earum centra æquilibrii eodem modo dividunt rectam δ2.

Non exiſtimo opus eſſe Lectorem admonere, quod data hac vna trunci ſuperficie, dentur omnes aliæ, quarum plana ſecantia, baſem (ſi opus eſt) productẽ in eadem recta ſecant, tales enim truncorum ſuperficies inter ſe ſunt ut earum altitudines, vel ut tangentes inclinationum planorum ſecan-

tium, ut vulgo, & facillime demonstratur.

PROP. 4. THEOREMA.

SIt curva quęcunque O I G E simplex & non sinuosa, ducantur duæ rectæ vtcunque inter se parallellæ AD, Lξ, cui vtrique sit normalis recta R V. Sit mixtilineum R V Y B D talis naturæ, ut, ducta recta G S B ad libitum parallella rectis AD, Lξ, recta SB contenta inter rectam R V & curvam V Y BD sit semper æqualis rectæ GM tangenti curvam in puncto G protractæ ad rectam Lξ. concipiatur super curva O I G E (cuius talis est curvitas, vt quo longius a puncto O producitur eo minus distet a recta R V) superficies cylindrici recti secta à plano transeunte per rectam L ξ & cylindrici basem in angulo semirecto secante. Dico mixtilineum R V Y B D esse æquale superficiei trunci inferioris cylindrici a plano resectæ. Si non sint æqualia, sit eorum differentia λ, dividaturque recta R V in tot partes æquales in punctis R, S, T, V, vt ductis rectis parallelis R D nempe SC, Tδ, VZ, & completis rectangulis R C, R B, Sδ, SY, T Z, differentia rectilinei R α B X Y T mixtilineo inscripti a rectilineo R D C B δ Y Z V eidem mixtilineo circumscripto sit minor quantitate λ; manifestum

nifestum enim est hoc fieri posse, quoniam recta RV dividi potest in plures, & adhuc plures partes in infinitum. Producantur rectæ parallellæ DR, CS, δT, ZV, per curvam propositam in puncta E, G, I, O, & producantur rectæ EL, GM, IN, curvam tangentes in punctis E, G, I, O, ad rectam Lξ in punctis L, M, N, O, quæ parallellas proximas ex utraque parte intersecent etiam in punctis F, H, N, ω, θ, μ; & ad parallelas proximas sint perpendiculares EQ, GK, IP. manifestum est (ob parallelismum rectarum GK, SV) GK esse ad GH ut SV ad GM seu SB, & proinde rectangulum Sδ, nempe rectæ GK in SB, æquale est rectangulo GH in SV, sed rectangulum GH in SV maius est portione superficiei trunci insistente curvę GI, quoniam GH recta maior est curua GI & recta SV æqualis est maximę altitudini portionis superficiei cylindrici insistentis curvę GI ob planum seminormaliter basem secans per rectam Lξ; & ideo rectangulum Sδ maius etiam est portione superficiei trunci insistente curvæ GI: eodem modo probatur rectangulum RC maius esse portione superficiei trunci insistente curvæ GE & rectangulum TZ maius esse superficiei trunci insistente curvæ OI; & ideo rectilineum RDCBδYZV mixtilineo circumscriptū maius est tota trunci superficie. Deinde ob parallelismum rectarum IP, SV, ut IP ad IN, seu GK vel ST ad θI, ita TV ad IN vel TY; & proinde rectangulum SY nempe rectę ST in TY æquale est rectangulo rectæ θI in TV, sed rectangulum θI in TV minor est portione superficiei trunci insistente curvæ IG, quoniam recta θI minor est curva GI & recta TV æqualis est minimæ altitudini eiusdem portionis superficiei trunci insistentis curvę GI, ob planum seminormaliter basem secans per rectam Lξ; & ideo rectangulum SY minus est portione superficiei trunci insistente curvæ GI: eodem modo probatur rectangulum RB minus esse portione superficiei trunci insistentis curvæ GE; & ideo rectilineum TYXBαR mixtilineo inscriptum minus est integra superficie

trun-

trunci, sed differentia inter rectilineum inscriptum & circumscriptum minor est quantitate λ ex suppositione; & ideo differentia inter superficiem trunci & figuram mixtilineam multo minor est quam λ, quoniam earum utravis demonstratur maior rectilineo inscripto & minor circumscripto, quod fieri non potest, ponitur enim λ differentia inter superficiem trunci & mixtilineum; nulla igitur est differentia inter figuram mixtilineam & superficiem trunci, & proinde sunt æquales, quod demonstrandum erat.

eisdem positis, sit mixtilineum VYBD 2 3 ξ talis naturæ, ut, a quolibet puncto curvæ EO nempe G ducta parallella rectæ Lξ nempe G 2, intercepta recta B 2 inter duas curvas VD, Dξ, fiat æqualis tangenti curvam propositam in puncto G protractæ ad rectam AD, nempe rectæ Gμ. dico mixtilineum VYBD 2 3 ξ æquale esse superficiei trunci superioris eiusdem prioris cylindrici posita eius altitudine recta RV. rectę MGμ in puncto G sit recta normalis G 7 rectam RV secans in puncto 7. ob similitudinem triangulorum SG7, GKH, ut GS ad G7 ita GK ad GH, & ut GK ad GH ita SV ad GM vel SB, & SR ad Gμ vel B2; & ideo GS est ad G7 ut RV ad S2. eodem modo demonstrari potest IT esse ad I 8 ut RV ad T3: cumque hoc fiat in omnibus punctis curvæ EO, manifestum est ex huius 2 mixtilineum RD 2 3 ξ V esse æquale superficiei cylindrici recti insistenti curvæ EO, cuius altitudo RV; atque superficies trunci inferioris æqualis est mixtilineo RVYBD, & proinde superficies trunci superioris æqualis est mixtilineo DBYVξ 3 2 D, quod demonstrare oportuit.

Hinc etiam manifestum est superficiem trunci inferioris & mixtilineum RVYBD esse quantitates magnitudine & gravitate analogas, quoniam eadem æqualitas quæ demonstratur de integris, eodem modo demonstratur de partibus earum proportionalibus. Manifestum quoque est superficiem trunci superioris & mixtilineum VYBD 2 3 ξ esse

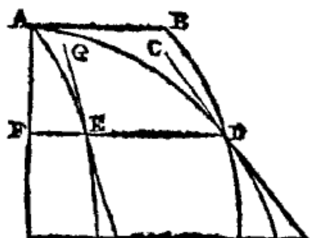
quan-

quantitates magnitudine & gravitate analogas; mixtilineum enim R V ξ 3 2 D magnitudine & gravitate analogum est toti superficiei cylindrici recti, & mixtilineum RVYBD magnitudine & gravitate analogum est superficiei trunci inferioris; & ideo (quod superest) mixtilineum D B Y V ξ 3 2 D analogum est relictæ superficiei trunci superioris, quod &c.

Huius propositionis diversi sunt casus, sed in omnibus eodem modo verificari potest præcedens conclusio.

PROP. 5. THEOREMA.

AD rectam A F ducantur duæ curvæ AE, AD, & rectæ A F sit perpendicularis recta F D curvas secans in punctis E, D, ducanturque rectæ GE, CD, curvas tangentes. Dico rectas EG, DC, non esse parallelas: sint (si fieri potest) parallelæ, & ducatur recta AB parallela & æqualis rectæ E D: deinde per puncta B, D, ducatur curva congruens curvæ A E, si modo punctum A superponatur puncto B & punctum E puncto D: manifestum est curvam BD secare curvam BD, item & rectam C D parallelam rectæ G E tangere curvam AD; atque CD ex suppositione tangit quoque curvam B D, quod est absurdum, quoniam curvæ A D, B D, se inui-



inuicem secant; rectæ igitur CD, GE, non sunt parallellæ quod demonstrandum erat.

Animaduertendum est nos hic tantum loqui de illis curvis simplicibus, quæ (quo longius distant ab A) eo maiorem intercipiunt rectam ED; nam ex hac suppositione pendet demonstrationis vis.

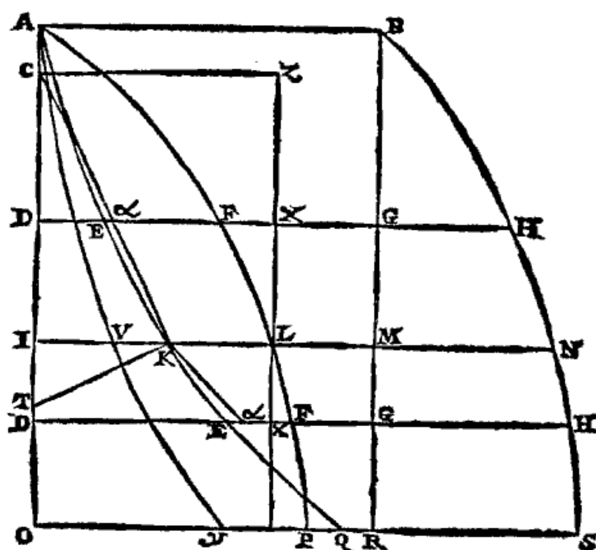
PROP. 6. PROBLEMA.

Inuenire curvam, quæ ad suum axem eandem habeat rationem, quam figura qualibet exhibita ad rectangulum sibi inscriptum, & recta data seu quæsita curvæ axi applicatum.

SIt figura exhibita ABSO, rectàngulum inscriptum ABRO; sitque curva BS simplex seu non sinuosa, si autem sit, diuidenda est in plures simplices, & demonstratio seorsim instituenda. deinde sit curva AFLP talis naturæ, ut, ducta recta quacunq; IN normali rectæ AO, curvam AFLP secante in L, recta IN sit æqualis potentia vtrique IL, IM: deinde ducatur curva AEKQ talis naturę, ut, ducta recta quacunque IM rectæ AO perpendiculari & curvam AEKQ secante in K & AFLP in L, rectangulum MIL sit æquale mixtilineo IAFL. dico figuram ABSO esse ad rectangulum ABRO ut curva AEKQ ad rectam AO. sit in curva AFLP punctum ad libitum K, per quod ducatur recta IN perpendicularis rectæ AO & lineas AFLP, BR, BHNS, secans in L, M, N, punctis; sitque ut IL ad IM ita IK ad IC & ducatur KC: recta KC curvam AQ secat vel tangit in puncto K; si fieri potest, eam secet in K, & ideo intra curvam cadet nempe intra punctum E versus verticem A: ducatur per punctum E recta DH rectæ IN parallella lineas AQ, AP, BR, BS, secans in punctis E, F, G, H, & rectam LC in α, item compleatur rectangulum ILZC, cuius latus LZ rectam DH secet in X. quoniam IL est ad IM ut IK ad IC, erit rectan-

 gulum

gulum MIK seu mixtilineum IAFL æquale rectangulo IZ: & quoniam rectangulum GDE est æquale mixtilineo DAF, erit ut IK ad DE ita mixtilineum IAFL ad mixtilineum DAF, at IK ad DE maiorem habet rationem quam ad Dα; & ideo mixtilineum IAFL maiorem habet rationem ad mixtilineum DAF quam IK habet ad Dα seu IC ad DC; & igitur mixtilineum IAFL maiorem habet rationem ad mixtilineum DAF quam rectangulum IZ ad rectangulum DZ, & per conversionem rationis mixtilineum IAFL ad mixtilineum IDFL habet minorem rationem quam re-



ctangulum IZ ad rectangulum IX, & permutando mixtilineũ IAFL ad rectangulum IZ minorem habet rationem quam mixtilineum IDFL ad rectangulum IX, cumq; rectangulũ IZ sit æquale mixtilineo IAFL, erit rectangulum IX minus

mix-

mixtilineo I D F L, sed & maius est, quod est absurdum; & proinde recta K C intra curvam A Q non cadit versus verticem: si fieri potest, cadat recta C K intra curvam versus basem reliquis se habentibus ut in priore positione; eritque ut I K ad D E ita mixtilineum I A F L ad mixtilineum D A L F, at I K ad D E maiorem habet rationem quam ad D α; & ideo mixtilineum I A F L ad mixtilineum D A L F, maiorem habet rationem quam IK ad D α seu I C ad D C; & igitur mixtilineum I A F L ad mixtilineum D A L F maiorem habet rationem quam rectangulum I Z ad rectangulum D Z, & inuertendo, per conversionem rationis & rursus invertendo, mixtilineum I A F L ad mixtilineum IDFL maiorem habet rationem quam rectangulum I Z ad rectangulum I X, & permutando mixtilineum I A F L ad rectangulum I Z maiorem habet rationem quam mixtilineum I D F L ad rectangulum I X, cumque mixtilineum I A F L sit æquale rectangulo I Z, erit rectangulum I X maius quam mixtilineum IDFL, sed & minus est, quod est absurdum; non cadit ergo recta C K intra curvam A Q versus basem; & ideo recta KC curvam A Q tangit in puncto K. rectę CK sit perpendicularis recta KT rectæ AO occurrens in T; manifestum est CI esse ad CK ut IK ad KT; atque CI est ad CK ut MI ad N I, quoniam rectæ I N, I M, I L, efficiunt triangulum rectangulum simile triangulo C I K, cuius latera IM, IN, sunt homologa lateribus C I, C K; & proinde ut IK ad K T ita I M ad IN; cumque hoc eodem modo fiat in omnibus punctis curvæ A Q, manifestum est ex huius 2 rectam A O esse ad curvam A Q ut rectangulum O B ad figuram ABSO, quod demonstrare oportuit.

S C H O L I V M.

HVius propositionis inversum facile quoque demonstratur; nempe, si recta A O sit ad curvam A Q vt rectangulum O B ad figuram A B S O, item si curva A P talis

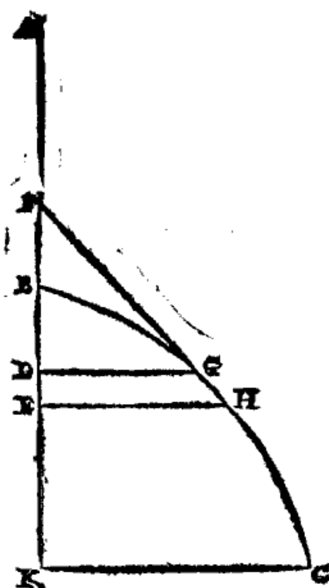
fit naturæ ut ducta I N quæcunque A O rectæ perpendicularis æquivaleat potentia utrique I L, I M; erit rectangulum M I K æquale mixtilineo I A F L: si non sit ita, ducatur curva A V Y talis naturæ ut rectangulum M I V fiat æquale mixtilineo I A F L, & demonstrabitur secundum tenorem huius propositionis rectas (quæ curvas AY, AQ, tangunt in punctis V & K) esse inter se parallelas, quod est absurdnm contra propositionem præcedentem.

Huius etiam propositionis varii sunt casus, sed hoc intellecto, in reliquis nulla restat difficultas.

PROP. 7. PROBLEMA.

Rectam ducere datam curvam tangentem in eius puncto dato, si modo curva sit ex earum numero, quas Cartesius appellat Geometricas.

SIt curva B H C hyperbola, cuius diameter recta A K & ordinatim applicatæ EH, KC, talis naturæ, ut solidum ex quadrato a B E in AE sit ad solidum ex quadrato a B K in A K ut cubus ab E H ad cubum a KC. Sit AB data a, BE b, & ratio solidi ex quadrato a BE in AE ad cubum ab EH ut $a3$ ad $c3$: oportet invenire punctum F, vt ducta recta F H hyperbolam tangat in pũcto H. ex datis AB, BE, datur AE $a + b$ & EH $\sqrt{C}\,(ab^2c3 + b^3c^3)$. Sit E F z & D E nihil seu serum o; & proinde erit BD $b - o$ & A D $a + b - o$, F D $z - o$ item D G $\sqrt{C}\,(c^3ab^2 - 2c^3abo + c^3ao^2 + c_3b3 - 3c^3b^2o + 3c^3bo^2 - c^3o^3)$. quoniam supponimus ordinatim applicatam D G incidere in curvam in eodem puncto G vbi recta F H eidem (si modo possibile sit) curvæ occurrit, erit ut EH ad EF ita DG ad DF; & ideo rectangulum ex D F in E H nempe $\sqrt{C}\,(b^2c^3az^3 -$



$\frac{3b^2c^3az^2o + 3b^2c^3azo^2 - b^2c^3ao^3 + b^3c^3z^3 - 3b^3c^3z^2o + 3b^3c^3zo^2 - b^3c^3o^3}{a}$) æquale erit rectangulo E F in DG nempe $\sqrt{C}\,(\frac{c^3ab^2z^3 - 2c^3abz^3o + c^3az^3o^2 + c^3b^3z^3 - 3c^3b^2z^3o + 3c^3bz^3o^2 - c^3z^3o^3}{a})$; & denominatores propter æqualitatem auferendo, item & utrumque ęquationis terminum cubice multiplicando & æqualia utrinque auferendo resultat æquatio hęc $3b^2c^3azo^2 - 3b^2c^3az^2o - b^2c^3ao^3 - 3b^3c^3z^2o + 3b^3c^3zo^2 - b^3c^3o^3 = c^3az^3o^2 - 2c^3abz^3o - 3c^3b^2z^3o + 3c^3bz^3o^2 - c^3z^3o^3$, & omnia per o dividendo $3b^2c^3azo - 3b^2c^3az^2 - b^2c^3ao^2 - 3b^3c^3z^2 + 3b^3c^3zo - b^3c^3o^2 = c^3az^3o - 2c^3abz^3 -$

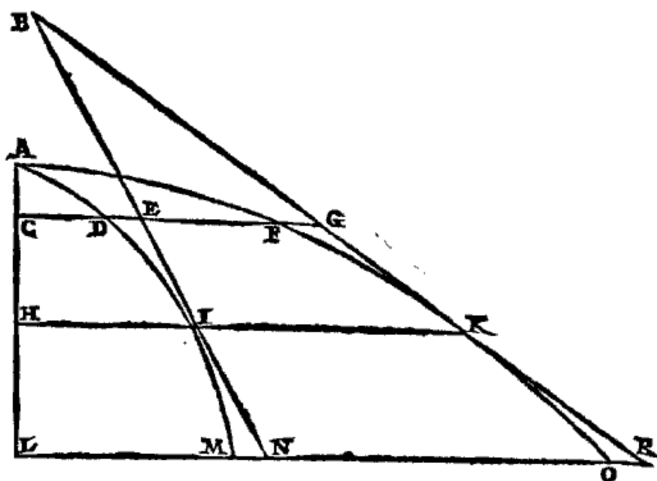
3c

$3c^3b^2z^3 + 3c^3bz^3o - c^3z^3o^2$, & quantitates reiiciendo in quibus reperitur o vel eius poteſtas, reſtant $-3b^2c^3az^2 - 3b^3c^3z^2 = -2c^3abz^3 - 3c^3b^2z^3$, & ubique defectus addendo & omnia dividendo per c^3bz^2, æquatio eſt $3ba + 3b^2 = 2az + 3bz$, & ideo $z = \frac{3ba + 3b^2}{a2 + 3b}$ nempe recta EF, quæ inuenienda erat.

PROP. 8. PROBLEMA.

SIt curva ADIM cuius axis AL, ſitque alia curua AFKO eius naturæ, ut, ducta recta quacunque HIK, rectæ AL perpendiculari, curva AI ſit ad rectam IK ut P ad Q. oportet ducere rectam tangentem curvam AFKO in puncto K: ducatur recta BI tangens curvam ADIM in puncto I (hoc enim fieri poſſe ſupponimus) ſitque recta IB æqualis curvæ AI & ducatur recta BK, quam dico tangere curvam AFKO in puncto K: ſi eam non tangat, cadat intra, ſitque punctum G intra curvam verſus verticem, & ducatur rectæ KH parallella GFEDC. manifeſtum eſt IK eſſe ad EG ut IB ad EB, & per conuerſionem rationis IK eſt ad differentiam inter IK & EG ut IB ad IE & permutando ut IK ad IB ſeu IA curvam, hoc eſt ut Q ad P, ita differentia inter IK & EG ad EI, atque ut Q ad P ita DF ad DA curvã; & ideo ut IK ad IA curuam ita DF ad DA curvam, & permutando ut IK ad DF ita IA curua ad DA curvam, & per converſionem rationis, ut IK ad differentiam inter IK & DF ita curva IA ſeu recta IB ad curvam ID; at differentia inter IK & EG maior eſt differentia inter IK & DF, quoniam punctum G ſupponitur cadere intra curvam; & proinde IK minorem habet rationem ad exceſſum ſupra EG quam ad exceſſum
1 huius. ſupra DF; & ideo IB eſt ad IE in minore ratione quam ad DI, eſt igitur IE maior quam DI, quod eſt abſurdum, non ergo cadit recta BK intra curvam AFKO verſus verticem: cadat intra (ſi fieri poteſt) verſus baſem nempe producta in puncto

cto R. IK est ad NR ut IB ad NB, & IK est ad differentiam inter IK & NR ut IB ad IN, & permutando ut IK ad IB seu IA curuam, hoc est ut Q ad P ita differentia inter IK & NR ad IN, atque ut Q ad P ita MO ad MA curvam, & ideo ut IK ad IA curvam ita MO ad MA curvã, & permutando ut IK ad MO ita IA curva ad MA curvam, & ut IK ad differentiam inter IK & MO ita IA curva seu IB ad IM curvam; at differen-



tia inter IK & NR minor est differentia inter IK & MO, quoniam supponimus R cadere intra curvam; & proinde IK maiorem habet rationem ad differentiam inter IK & NR quam ad differentiam inter IK & MO; & ideo IB est ad IN in maiore proportione quam ad IM; est igitur IN minor quam IM, 1 huius. quod est absurdum, non ergo cadit recta BK intra curvam versus basem, & proinde curvam tangit in puncto K, quod demonstrare oportuit.

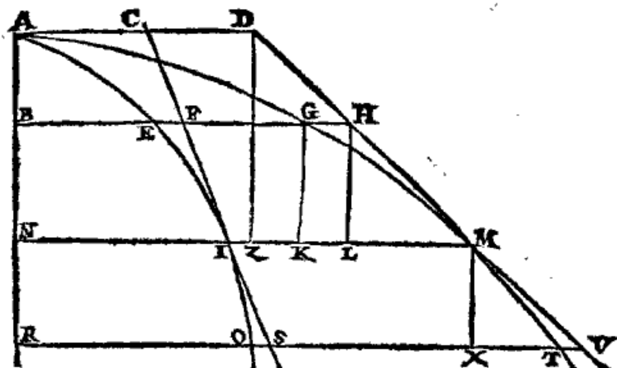
Per hanc propositionem possunt omnium cycloidum cur-

vae

væ comparari cum suis axibus vel basibus secundum methodum 2 huius.

PROP. 9. PROBLEMA.

SIt curva AEIO, cuius axis A R; sitque alia curva AGMT talis naturæ, ut ducta recta quæcunque N I M rectæ AR perpendiculari, curva AI sit ad rectam N M ut P ad Q. oportet ducere rectam tangentem curvam A G M T in puncto M. ducatur recta I C tangens curvam A E I O in I (hoc enim fieri posse supponimus) & occurrens rectæ A D ipsi NM parallelæ in D. sit M Z ad rectam I C ut Q ad P, sitque Z D parallella rectæ A R & ducatur recta D M, quam dico esse tan-



gentem curvæ A G M T in puncto M: si eam non tangat, cadat intra, sitque punctum H intra curvam versus verticem & ducatur ipsi NM parallella reliquas lineas secans ut in figura. AE est ad B G ut P ad Q & A I est ad NM ut P ad Q, & ideo ut AE ad BG ita AI ad NM & permutando ut A E ad AI ita BG ad NM, & ut AE ad E I ita BG ad KM, & permutando

mutando ut A E ad B G, hoc est ut P ad Q ita E I ad K M: deinde ut C I ad Z M, hoc est ut P ad Q ita F I ad L M, quod sic probo, ratio CI ad ZM componitur ex ratione C I ad D Z & D Z ad Z M, & ratio FI ad L M componitur ex ratione F I ad HL seu C I ad D Z & HL ad LM seu D Z ad Z M, & proinde ut EI ad KM ita FI ad L M, & permutando ut EI ad FI ita KM ad L M; sed quoniam supponimus H cadere intra curvam, KM erit minor quam LM, & proinde EI minor erit quam FI, quod est absurdum; & ideo recta DM non cadet intra curvam versus verticem: cadat (si fieri possit) intra versus basem, nempe producta in puncto V. AI est ad N M ut P ad Q & AO est ad R T, ut P ad Q, & ideo A I est ad N M ut A O ad RT, & permutando AI est ad A O ut NM ad R T, & ut A I ad IO ita NM ad XT, & permutando ut A I ad N M seu ut P ad Q ita IO ad XT: deinde ut CI ad ZM seu P ad Q ita IS ad X V (quod probatur sicut in priore positione) & proinde ut I O ad XT ita IS ad XV, & permutando ut IO ad IS ita XT ad XV; sed (quoniam supponimus V cadere intra curvam) erit X T maior quam XV; & proinde IO maior erit quam I S, quod est absurdum, non ergo cadit recta DM intra curvam versus basem, & proinde curvam tangit in puncto M, quod demonstrare oportuit.

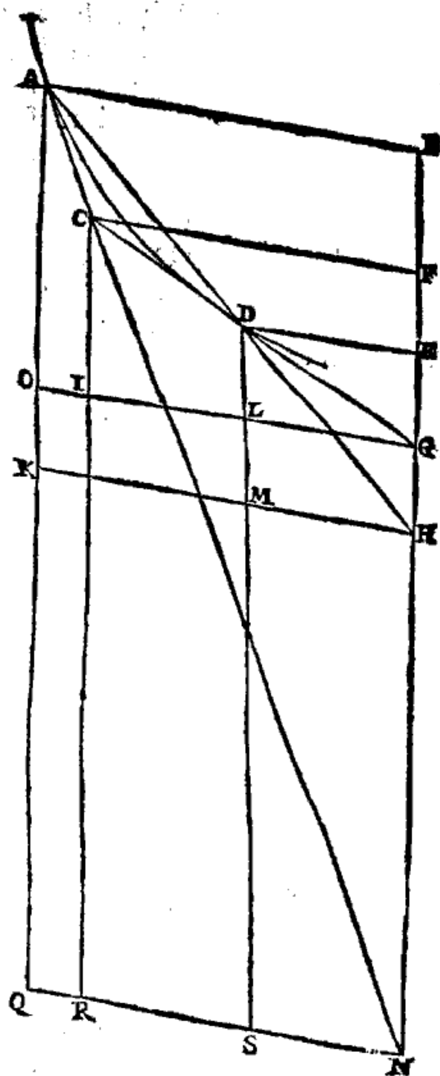
1 huius.

1 huius.

Per hanc propositionem potest curva, cuiuscunq; superficiei trunci cylindrici recti expansæ in planum, comparari cum eiusdem axe vel base ope huius 2, si modo possit duci recta tangens basem cylindrici in puncto dato.

PROP. 10. THEOREMA.

SIt curva quęcunque A D & recta quęcunque BN: ducantur ex duobus curvæ punctis quibuscunque A, D, duæ rectæ parallelæ ad rectam BN, nempe AB, DE, & iungatur AD recta producta in H, ducanturque D G, A N, rectæ curvam tangentes in punctis A, D: deinde compleantur parallelo-


A
B
C
F
D
E
O
I
L
G
K
M
H
Q
R
S
N

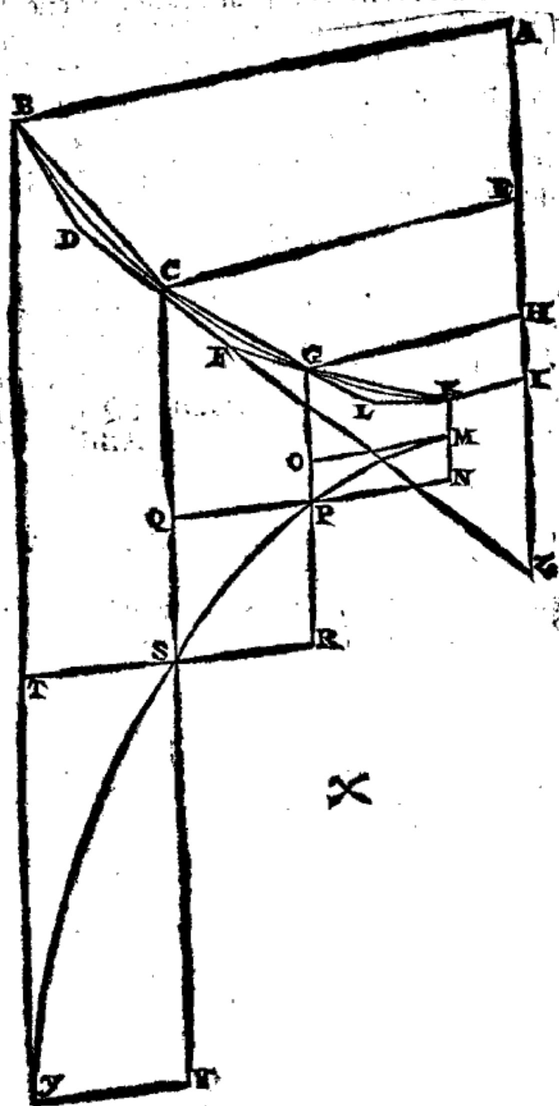
logramma ABGO, DENS, & producantur rectæ AO, NS, ut concurrant in Q. dico trapezium A D E B maius esse mixtilineo ADLO. ducatur HK parallela & æqualis rectæ A B; manifestum est trapezium ADEB esse æquale trapezio ADMK, item & trapezium A D M K maius esse trapezio A D L O, & ideo multo maius mixtilineo A D L O; patet ergo propositum nempe trapezium ADEB maius esse mixtilineo ADLO.

Producatur recta DG in C: dico rectilineum A B E D C minus esse mixtilineo A D S Q. ducatur recta C F parallela rectis AB, DE, & C R parallela rectis AQ, D S: patet trapezium A B F C esse æquale trapezio A C R Q & trapezium CFED esse æquale trapezio CDLI; & proinde rectilineum ABEDC æquale est rectilineo ACDLIRQ, quod minus est rectilineo ACDSQ; & ideo rectilineum ABEDC multo minus est mixtilineo ADSQ, quæ demonstranda erant.

PROP. II. THEOREMA.

Sit spatium mixtilineum quodcunque ABKI comprehensum à curva B K, recta A I, & duabus rectis parallelis BA, KI; sitque curva M Y talis naturæ, vt (sumpto in curva B K quolibet puncto C & ex eo ducta recta C E parallela rectæ AB, & recta CZ curvam BK contingente terminata a recta AI, si opus est, producta in Z) recta EZ semper sit æqualis rectæ C S parallelæ rectæ A Z & terminata à curua Y M. dico mixtilineum BKMY, comprehensum à curvis BK, MY, & rectis B Y, KM, rectæ A Z parallelis, esse æquale mixtilineo B A I K. Si non sunt æqualia, sit eorum differentia X; & dividatur curvilineum BKMY à tot rectis CS, GP, KM, rectæ BY parallelis, vt (ductis rectis O M, QN, TR, Y V, parallelis rectæ AB) omnia parallellogramma O N, QR, T V, simul minora sint quam X, hoc enim fieri potest ab indefinito parallelarum numero. ducantur subtendentes rectæ BC, CG, GK, & tangentes in punctis B, C, G, K, BD, DF, FL, LK: ma-

 nifestum



A
B
D
C
H
F
G
L
M
O
N
Q
P
R
S
T
X

nifestum est ex præcedente trapezium ABCE maius esse mixtilineo BCST item & trapezium CEHG maius esse mixtilineo CGPQ & trapezium GHIK maius esse mixtilineo GKMO, & ideo rectilineum ABCGKI maius est mixtilineo BKMOPQST. patet quoque ex antecedente rectilineum ABDCE minus esse mixtilineo BCVY & rectilineũ ECFGH minus esse mixtilineo CGRS & rectilineum HGKI minus mixtilineo GKNP, & proinde rectilineum ABDFLKI minus est mixtilineo BKNPRSVY: cum igitur mixtilineum BAIK consistat inter rectilinea ABCGKI, ABDFLKI & mixtilineũ BKMY consistat inter mixtilinea KMOPQSTB, KNPRSVYB, item rectilinea ABCGKI, ABDFLKI consistant inter mixtilinea BKMOPQST, BKNPRSVY, manifestum est mixtilinea ABKI, KMYB, minore quantitate differre quam mixtilinea BKMOPQST, KNPRSVYB, sed horum differentia ex suppositione est minor quam X, & ideo differentia mixtilineorum ABKI, BKMY, est multo minor quam X, quod est absurdum, ponitur enim maior quam X; nulla ergo est differentia inter mixtilinea ABKI, BKMY, & ideo æqualia sunt, quod erat demonstrandum. Eadem fere esset demonstratio in duabus præcedentibus, etiamsi convexitas curvæ BK esset versus rectam AI.

DEFINITIONES.

I.

SI fuerit figura ABFE comprehensa à rectis parallelis AB, EF, recta AE parallelis normali & a BF linea qualibet, item figura GHK comprehensa a rectis GH, GK, (ita ut GH sit æqualis rectæ AB & GK rectæ EF) & linea HK, quæ etiam æqualis est lineæ BF, hac lege, ut, sumptis ad libitum lineis æqualibus BD, HI, iuncta recta GI fiat æqualis rectæ DC perpendiculari ad rectam AE: appello figuram GHK, figuram ABFE involutam; & figuram ABFE, figuram GHK evolutam. Appel-

2.

Appello quoque puncta B,H, vel D,I, vel F, K, sibi mutuò relativa.

3.

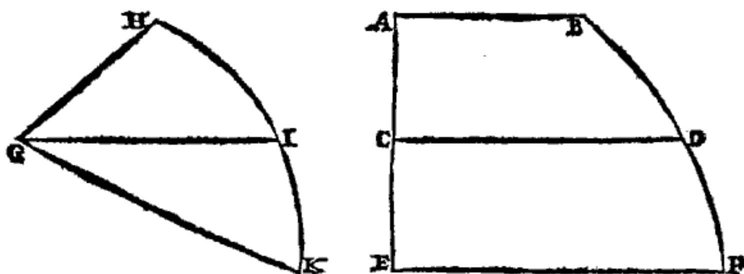
Punctum G appello centrum involutionis.

4.

Angulum H G K voco angulum involutionis.

5.

Appello rectam A E evolutæ figuræ axem, *item* quamlibet CD illi perpendicularem axi ordinatim applicatam.

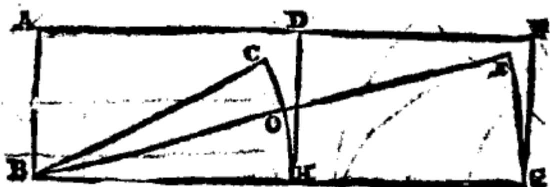


PROP. 12. *THEOREMA.*

SIt rectangulum A F G B, quod involutum efficiat sectorem circuli B E G, item rectangulum ADHB, quod involutum efficiat sectorem BC H. dico angulum involutionis C B H maiorem esse angulo involutionis E B G. est enim ut

B G

B G ad B H ita arcus E G ſeu arcus C H ad arcum O H, ſed B G maior eſt quam B H, & ideo C H maior eſt quam O H, & ideo angulus C B H maior eſt angulo E B G, quod erat demonſtrandum.



PROP. 13. THEOREMA.

SIt figura ABMI, quæ inuoluta efficiat figuram NPX. ſit ex centro involutionis N arcus circuli PT: dico arcum PT minorem eſſe recta AI, ſeu figurę evolutę axe. ducatur recta BK parallela & ęqualis rectę AI, ſitque rectangulum ad libitum EGLI, ut figuræ ABMI inſcribatur rectilineam ABFGLI, quod ſi inuolvatur, erit eius angulus inuolutionis minor angulo involutionis rectanguli ABKI involuti, hoc autem ita innoteſcit, rectilineum ABFGLI inuolutum idem eſt cum inuoluto rectangulo ABFE vna cum inuoluto rectangulo EGLI; & rectangulum ABKI involutum idem eſt cum priore involuto rectangulo ABFE vna cum inuoluto rectangulo EFKI, ſed ex præcedente angulus involutionis rectanguli EGLI minor eſt angulo involutionis rectanguli EFKI, & proinde angulus involutionis rectilinei ABFGLI inuoluti minor eſt angulo involutionis rectanguli ABKI inuoluti: eodem prorſus modo (ſi ducantur rectę QR, SV, parallelæ rectis AB, IM, & rectæ Rθ, VY, parallelæ axi AI, ut compleatur rectilineum ABQRθGSVYI) demonſtrabitur eius angulus involutionis eſſe minor angulo inuolutionis

nis rectilinei ABFGLI, & proinde multo minor erit angulo involutionis rectanguli ABKI, népe γNT, supponimus enim sectorem γNT esse rectangulum ABKI involutum: denique eodem semper modo demonstratur, quod, quo minus differt rectilineum inscriptum à figura ABMI, eo semper maior sit excessus anguli γNT supra angulum involutionis rectilinei; & ideo multo excedit angulus γNT ipsius figuræ ABMI angulum involutionis PNX, & proinde figuræ evolutæ axis AI seu arcus γT excedit arcum PT, quod demonstrandum erat.

Sit secundo ex centro involutionis N arcus circuli OX: dico arcum OX maiorem esse recta AI nempe axe figuræ PNX euolutæ. ducatur recta MD parallela & æqualis rectæ AI & producatur AB in D, sitque rectangulum ad libitum ACGE, ut figuræ ABMI circumscribatur rectilineum ACGHMI, quod involvatur, erit eius angulus involutionis maior angulo involutionis rectanguli ADMI, hoc autem ita innotescit, rectilineum ACGHMI inuolutum idem est cum involuto rectangulo EHMI vna cum involuto rectangulo ACGE, & rectangulum ADMI involutum idem est cum priore involuto rectangulo EHMI vna cum involuto rectangulo

gulo A DHE, sed ex præcedente angulus involutionis rectanguli A C G E maior est angulo involutionis A D H E, & proinde angulus involutionis rectilinei ACGHMI inuoluti maior est angulo involutionis rectanguli A D M I: eodem prorsus modo (si ducantur rectæ R β, V Z, parallelę rectis A B, I M, & rectæ R α, V X, parallellæ axi A I, ut compleatur rectilineum A α R β G X V Z M I) demonstrabitur eius angulus involutionis esse maior angulo involutiouis rectilinei ACGHMI, & proinde multo maior erit angulo involutionis rectanguli ADMI nempe δNX, supponimus enim sectorem δNX esse rectangulum ADMI inuolutum: deniq; eodem semper modo demonstratur, quod, quo minus differt rectilineū circumscriptum à figura ABMI, eo semper maior sit excessus anguli involutionis rectilinei supra angulum δNX, & ideo multo excedit angulus involutionis ipsius figura PNX angulum δNX, & proinde figuræ evolutæ axis A I seu arcus δX multo minor est arcu OX, quod demonstrare oportuit.

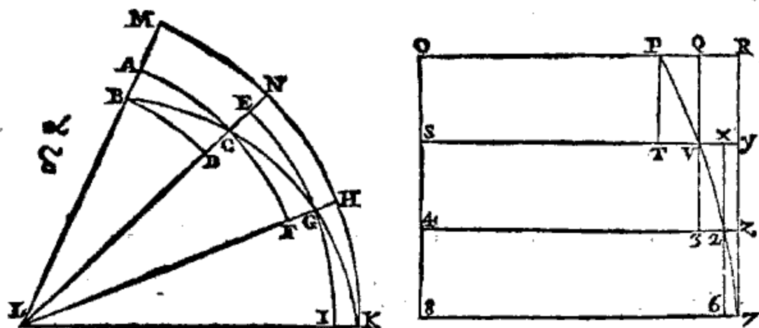
PROP. 14. PROBLEMA.

Ex data figura involuta, eiusdem evoluta axem invenire.

SIt figura involuta L B K, cuius evolutæ oportet invenire axem. Centro L sit circuli arcus MK; sitque figura OP78 contenta rectis parallelis OP, 87, rectaque O8 illas normaliter secante & linea P7 talis naturæ, ut (in inuoluta sumpta qualibet recta L C producta in N, item in figura O P 78 ducta recta S V rectæ O 8 perpendiculari & eam secante in ratione MN ad NK) 87 sit ad SV ut LK ad LC. dico rectangulū circumscriptum OR 78 esse ad figuram OP78 ut arcus MK ad axem figuræ LBK euolutæ: si non sit ita, sit vt OR 78 ad O P 78 ita MK ad α, quæ differat ab axe figuræ LBK euolutæ quātitate δ: deinde e centro L circumscribantur figuræ inuolutæ LBK similes arcus circulares AC, EG, HK, & eidem in-

 scri-

ſcribantur totidem ſimiles arcus circulares BD, CF, GI, vt differentia inter arcus inſcriptos & circumſcriptos ſit minor quam δ; deinde diuidatur recta O8 in tot partes ęquales O S, S4, 48, in quot diuiditur arcus MK a rectis LC, LG, productis, ducanturque ipſi O8 perpendiculares rectæ SY, 4Z, lineam P7 ſecantes in punctis V, 2, & iungantur rectę OS parallelę PT, QV3, X26. manifeſtum eſt ex figurę OP78 deſcriptione SY eſſe ad SV vt LN ad LC ſeu vt arcus MN ad arcum AC; & ideo vt rectangulum OY ad rectangulum OV ita arcus MN ad arcum AC; eodem modo probatur, vt re-



ctangulum SZ ad rectangulum S2 ita arcus NH ſeu arcus MN ad arcum EG, & vt rectangulum 47 ad rectangulum 47 ita arcus HK ad arcum HK, cumque omnes primę inter ſe & omnes tertię inter ſe ſint ęquales, erit vt omnes primæ nempe rectangulum O7 ad omnes ſecundas nempe rectilineum O Q V X 2 Z 7 8 ita omnes tertiæ nempe arcus MK ad omnes quartas nempe arcus AC, EG, HK; eſt autem vt O7 ad figuram OP78 ita MK ad α, at rectilineum O Q V X 2 Z 7 8 maius eſt quam figura OP 78, & ideo arcus AC, EG, HK, ſimul ſunt maiores quam α; ſed arcus AC, EG, HK, maiores

etiam

etiam sunt quam axis figuræ LKB euolutæ, quod sic probo, axis totius figuræ LBK euolutę est æqualis axibus figurarum BLC, CLG, GLK, euolutarum, sed ex antecedente axis figuræ LBC euolutæ minor est arcu AC, & axis figuræ CLG euolutæ minor arcu EG, item axis figuræ GLK euolutæ minor arcu HK, & igitur axes omnium figurarum partialium simul seu axis figuræ LBK euolutæ minor erit omnibus arcubus AC, EG, HK, simul. Deinde ex descriptione figuræ OP 78, vt OR ad OP seu vt OY ad OT ita LM ad LB vel MN ad BD, eodemque modo demonstratur, vt SZ ad S3 ita NH ad CF, & 47 ad 46 ita HK ad GI, cumque primæ inter se & tertiæ inter se semper sint æquales, erit vt omnes primæ nẽpe O7 ad omnes secundas nempe rectilineum OPTV3268 ita omnes tertiæ nempe MK ad omnes quartas nempe arcus BD, CF, GI; cumque sit vt O7 ad figuram OP78 ita MK ad α, & rectilineum OPTV3268 sit minus quam figura OP78, erũt omnes arcus BD, CF, GI, simul minores quam α, sed arcus BD, CF, GI, minores etiam sunt quam axis figuræ LBK euolutæ, quod sic probo, axis totius figuræ LBK euolutæ est æqualis axibus figurarum BLC, CLG, GLK, euolutarum, sed ex antecedente, axis figuræ LBC euolutæ maior est arcu BD, & axis figuræ CLG euolutæ maior arcu CF & axis figuræ GLK maior arcu GI, & igitur axis omnium figurarum partialiũ simul seu axis figuræ LBK euolutæ maior est omnibus arcubus BD, CF, GI, simul; euidens igitur est quatuor esse magnitudines, nempe prima omnes arcus BD, CF, GI, simul, secunda axis figurę LBK euolutę, tertia α, quarta omnes arcus AC, EG, HK, simul, quarum maxima & minima sunt, omnes arcus AC, EG, HK, simul, & omnes arcus BD, CF, GI, simul, harum ergo differentia maior erit quam differentia duarum reliquarum nempe axis figurę LBK euolutę & quantitatis α, quod est absurdum, ponitur enim minor, nulla ergo est differentia inter α & axem figurę LBK euolutę, & ideo ęquales sunt, quod demonstrare oportuit.

CONSECTARIVM.

HInc manifestum est ex data figura inuoluta inueniri posse eandem euolutam, nam ex hac datur figuræ inuolutæ LBK vel eius cuiuslibet partis BLC (dum euoluitur) axis, danturque ordinatim applicatæ, quoniam sunt eadem cum rectis inter centrum inuolutionis L & puncta sua relatiua in figura euoluta LBK.

PROP. 15 PROBLEMA.

In antecedente figura oportet inuenire rationem inter sectorem MLK & figuram BLK.

SIt figura OP78 contenta rectis parallelis OP, 87, rectaque O8 illas normaliter secante & linea P7 talis naturæ, vt (in inuoluta sumpta qualibet recta LC producta in N, itē in figura OP78 ducta recta SV rectæ O8 perpendiculari & eam secante in ratione MN ad NK) 87 sit ad SV in duplicata ratione rectæ LK ad LC: dico rectangulum circumscriptum OR78 esse ad figuram OP78, vt sector LMK ad inuolutam LBK. Si non sit ita, sit vt OR78 ad OP78 ita MLK ad α, quæ differat ab inuoluta BLK quantitate δ: deinde circumscribantur figuræ inuolutæ BLK similes sectores circulares LAC, LEG, LHK, & eidem inscribantur totidem similes sectores circulares LBD, LCF, LGI, vt differentia inter mixtilineum inscriptum LBDCFGI & circūscriptum LACEGHK sit minor quam δ: deinde diuidatur O8 in tot partes æquales OS, S4, 48, in quot diuiditur arcus MK a rectis LC, LG, productis, ducanturque ipsi O8 perpendiculares rectæ SY, 4Z, lineam P7 secantes in punctis, V, 2, & iungantur rectæ OS parallelæ PT, QV3, X26: manifestum est ex figuræ OP78 descriptione SY esse ad SV seu OY ad OV in duplicata ratione LN ad LC seu vt sector LMN ad sectorem LAC; eodem

mo

modo probatur SZ esse ad S2 vt LNH ad LEG, & 47 ad 47 vt LHK ad LHK, cumque omnes primæ inter se & omnes tertiæ inter se sint æquales, erit vt omnes primæ nempe rectangulum O7 ad omnes secundas nempe rectilineum OQVX2Z78 ita omnes tertiæ nempe sector MLK ad omnes quartas nempe mixtilineum LACEGHK, est autem vt O7 ad figuram OP78 ita sector MLK ad α, at rectilineum OQVX2Z78 maius est quam figura OP 78, & ideo mixtilineum LACEGHK maius est quam α. Deinde ex descriptione figuræ OP78, OR est ad OP vel OY ad OT in duplicata ratione LM ad LB vel vt MLN ad BLD, eodemque modo probatur, SZ ad S3 vt NLH ad CLF, & 47 ad 46 vt HLK ad GLI, cumque primæ inter se & tertiæ inter se semper sint æquales, erit vt omnes primę nempe O7 ad omnes secundas nempe rectilineum OPTV3268 ita omnes tertiæ nempe MLK ad omnes quartas nempe mixtilineum LBDCFGI, at rectilineum OPTV3268 minus est quam figura OP 78, & ideo mixtilineum LBDCFGIL minus est quam α; euidens igitur est quatuor esse magnitudines, nempe prima mixtilineum LBDCFGI, secunda, inuoluta LBK, tertia α, quarta mixtilineum LACEGHK, quarum maxima & minima sunt mixtilinea LACEGHK, LBDCFGI, harum ergo differentia maior erit quam differentia duarum reliquarum nempe α & inuolutæ LBK, quod est absurdum, ponitur enim minor, nulla ergo est differentia inter α & inuolutam BLK, sunt ergo æquales, quod demonstrare oportuit.

PROP. 16. THEOREMA.

Omnis figura euoluta est eiusdem inuoluta dupla.

SIt figura inuoluta LBK, quæ euoluta efficiat figuram OP 78: dico figuram OP 78 duplam esse figuræ LBK: si ita non sit, fiat euoluta OP78 dupla quantitatis α, quæ differat ab inuoluta LBK quantitate δ; inscribatur inuolutæ

LBK

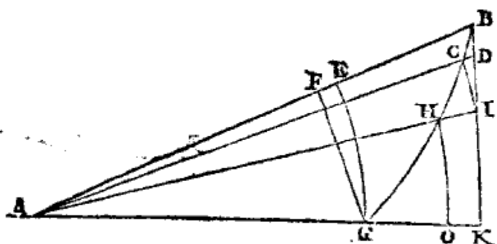
LBK mixtilineum LBDCFGI & eidem circumscribatur mixtilineum LACEGHK vt eorum differentia sit minor quam ♄;
13 huius. sintque punctis B, C, G, K, evolutæ puncta relatiua P, V, 2, 7, & compleantur rectangula OV, OT, S2, S3, 47, 46. recta LC est æqualis rectæ S V & curua A C est maior recta QV, & ideo sector circularis LAC maior est dimidio rectanguli OV, eodem modo probatur sectorē circularem LGE maiorē esse dimidio rectanguli S2 & sectorem circularem LHK maiorem esse dimidio rectanguli 47, & ideo mixtilineum LACE
13 huius. GHK maius esse dimidio OQVX2Z78, & proinde multo maius quam dimidium evolutæ OP 7 8 nempe α. deinde recta OP est æqualis rectæ LB & curva BD minor recta PT, & ideo sector circularis LBD minor est dimidio rectanguli O T, eodemque modo demonstratur sectorem LCF minorem esse dimidio rectanguli S 3 & sectorem L G I minorem esse dimidio rectanguli 46, & ideo mixtilineum LBDCFGI minus est dimidio rectilinei OPTV 3 2 6 8, & proinde multo minus quam dimidium evolutæ nempe α: evidens igitur est quatuor esse quantitates, nempe prima mixtilineum LBDCFGI, secunda, involuta LBK, tertia α, quarta mixtilineum LACE GHK, quarum maxima & minima sunt mixtilinea LACEG HK, LBDCFGI, harum ergo differentia maior erit quam differentia duarum reliquarum nempe α & involutæ LBK, quod est absurdum, ponitur enim minor, nulla ergo est differentia inter α & involutam LBK, sunt ergo æquales, quod demonstrare oportuit.

PROP. 17. THEOREMA.

SIt figura involuta ABG; producatur recta A G & in eam sit perpendicularis recta BK, quæ tota cadat extra curvam B G: dico rectam BK non esse minorem quam axis figuræ A B G evolutæ; sit si fieri potest minor prædicto axe, sitque axis figuræ ABC evolutæ minor quam excessus axis

figuræ

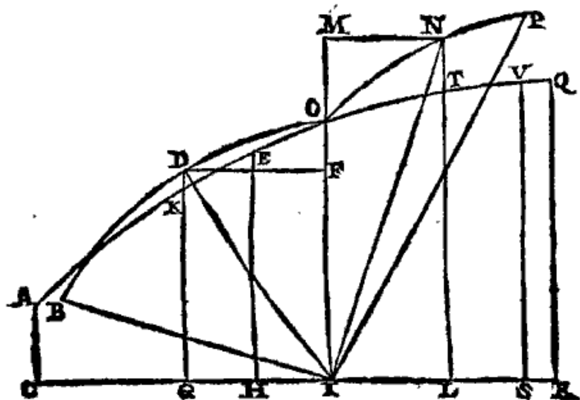
figuræ ABG euolutæ supra rectam BK; ducantur ex centro A arcus circulares CI, HO; manifestum est arcum CI maiorem esse axe figuræ CAH evolutæ & HO maiorem esse axe figuræ HAG evolutæ, atque recta DI maior est arcu CI & recta IK maior est arcu HO, & ideo recta DK multo maior est quam axis figuræ CAH evolutæ vna cum axe figuræ HAG euolutæ, hoc est, recta DK maior est axe figuræ CAG euolutæ, sed axis figuræ BAG euolutæ superat rectam BK maiore excessu quam axe figuræ BAC euolutæ, & proinde axis fi-



guræ BAG euolutæ minùs axis figurę BAC euolutę, hoc est, axis figurę CAG euolutę, maior est recta BK, sed & minor est rectę DK, quod est absurdum, recta ergo BK non est minor axe figurę BAG euolutę, quod demonstrandum erat.

Ex puncto G in rectā AB sit perpēdicularis recta GF, quam dico esse minorem axe figurę ABG euolutę. centro A sit arcus circularis GE, qui maior est recta GF & minor axe figurę ABG euolutę, & ideo recta GF multo minor est axe figurę ABG euolutę, quod demonstrare oportuit.

SIt figura euoluta ACRQ, in qua sit ordinatim applicata ad libitum OI. deinde manente recta OI inuoluatur figura ACRQ in figuram inuolutam IBOP: dico lineam BOP cadere inter lineam AOQ & eius axem CR, item lineas AOQ, BOP, se inuicem tangere in puncto O. si fieri potest, cadat linea OP extra lineam OQ in puncto N: suppono curuam OQ (quo propius ad Q) eo longius distare ab axe IR, & igitur NM perpendicularis recta in rectam IO productam cadit extra curuam ON, & proinde recta NM (ex antecedente) non est minor quam axis figurę ION euolutę. Sit in euoluta ordinatim applicata VS ęqualis rectę IN; manifestũ



est figuram OVSI esse ION euolutam, atque IN seu SV est maior quam LT, & ideo SI est maior quam IL, nempe axis figurę ION euolutę maior quam MN, quod est absurdum, & proinde OP non cadit extra OQ: eodem modo probatur OP non coincidere cum OQ, cadit ergo intra, quod demonstrare oportuit.

Se-

Secundo, si fieri potest, cadat linea O B extra lineam O A in puncto D; suppono curuam O A (quo propius ad A) eo minus distare ab axe C I; cadat D F perpendicularis in rectam O I non productam intra curuam D O, & ideo D F est minor axe figurę I D O euolutę: sit in euoluta ordinatim applicata E H, ęqualis rectę D I; manifestum est figuram O E H I esse I O D euolutam, atque I D seu H E maior est quam recta K G, & ideo G I est maior quam H I, nempe D F maior quam axis figurę I D O euolutę, quod est absurdum ex huius antecedente, & proinde B O non cadit extra A O: eodem modo probatur O B non coincidere cum O A, cadit ergo intra, quod demonstrare oportuit.

Quod si perpendicularis D F cadat in I O productam, non potest I O B esse figura I O A C inuoluta, quoniam I D maior erit quam vlla ordinatim applicata in figura I O A C.

CONSECTARIVM.

QVoniam figurę C A O Q R, I B O P, se mutuo tangunt in puncto O, manifestum est rectam, vnam ex his figuris tangentem in puncto O, alteram etiam in eodem puncto tangere; atque hinc euidens est methodus ducendi rectam, quę inuolutam in dato puncto tangat, si modo detur methodus ducendi rectam, quę euolutam in dato puncto contingat, & e contra; recta enim tangens euolutam eodem inclinat angulo ad ordinatim applicatam, quo tangens inuolutam inclinat ad eandem ordinatim applicatam in centrum inuolutionis cum reliquis concurrentem.

Omnia prędicta de figurarum inuolutione eodem modo demonstrantur, quando euolutę curua est conuexa versus axem, etiamsi in nostris figuris euolutę curua sit versus axē concaua.

PROP. 19. THEOREMA.

SIt figura quęcunque AB super qua imaginetur cylindricus rectus sectus a plano transeunte per rectam FG & planum baseos AB seminormaliter secante. sit recta ML rectę FG parallela, sitque super recta ML mixtilineum MOLN talis naturę, vt (ducta recta quacunque EDCNO rectæ FG normali & figuras AB, LOMN, secante in punctis D,C,N,O) recta assignata P sit ad mediam arithmeticam inter DE, CE, vt DC ad NO. Dico cylindricum rectum cuius basis MOLN & altitudo recta P esse æqualem inferiori trunco cylindrici super AB secti vt supra dictum est. Quoniam enim P est ad mediam arithmeticam inter DE, CE, vt DC ad NO, igitur rectangulum P in NO æquale est trapezio a rectis DC, CE, DE, rectangulo ad D & C, sed tale trapezium est communis sectio plani super recta EO ad basem AB recti cum trunco inferiore cylindrici; cumque hoc semper fiat vbicunque ducatur recta EDCNO, manifestum est ex doctrina ductuum Gregorii à S. Vincentio cylindricum rectum cuius basis MOLN & altitudo P æqualem esse trunco inferiori cylindrici recti super MOLN secti vt supra dictum est, quod demonstrare oportuit.

Hinc quoque patet cylindricum cuius basis MOLN & altitudo P esse magnitudine & grauitate analogum dicto trũco; cumque cylindricus sit suæ basi analogus, patet etiam truncum esse eidem basi magnitudine & grauitate analogũ.

PROP. 20. THEOREMA.

EIsdem positis quæ in antecedente, sit recta FZ rectæ FG normalis, super qua sit mixtilineum QTVR talis naturæ, vt (ducta recta quacunque RTDS rectæ FR normali & figuras QTVR, AB, intersecante in punctis T, D, S) recta assignata P sit ad DS, vt recta RF ad rectam RT. dico cylindricum

cum rectum cuius basis QTVR & altitudo P esse æqualem inferiori trunco cylindrici super AB secti vt supra dictum est, nempe per planum in recta FG transiens & basem A B seminormaliter secans. Quoniam P est ad DS vt RF ad RT, erit rectangulum P in R T æquale rectangulo R F in D S, sed rectangulum R F in D S est communis intersectio trunci inferioris cylindrici cum plano super recta R S plano baseos AB normali, & ideo rectangulum P in R T eidem communi sectioni est æquale, cumque hoc semper fiat vbicunque ducatur recta R S, manifestum est ex doctrina ductuum Gregorii

a S. Vincentio cylindricum rectum cuius basis QTVR & altido P æqualem esse trunco inferiori cylindrici recti super AB secti vt dictum est supra, quod demonstrare oportuit.

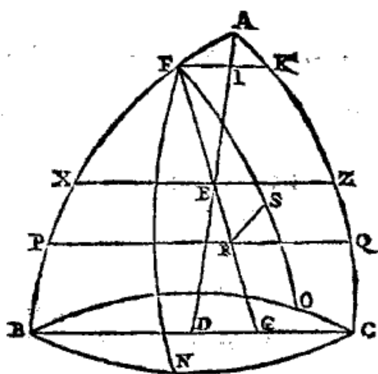
Hinc etiam euidens est cylindricum cuius basis QTVR & altitudo P esse magnitudine & grauitate analogum dicto trunco cylindrici recti, & proinde basis quoque cylindrici recti QTVR eidem trunco est analoga magnitudine & grauitate.

Supposito omnium figurarum quadraturas & centra grauitatis data esse, facile erit omnium truncorum cylindrici cuiuslibet recti cubaturas & centra grauitatis ex hac propositione & præcedente inuenire, vel e contra: eodem modo ex huius secunda tertia & quarta datis omnium figurarū quadraturis & grauitatis centris non difficile est inuenire superficiei cuiuscunque trunci cylindrici recti quadraturam & grauitatis centrum vel e contra, quod hic admonuisse sufficiat.

PROP. 21. PROBLEMA.

Sit solidum rotundum quodlibet sectum per diametrum AD plano normali ad basem circularem BOCN a diametro BC, & interfectione cum plano efficiens figuram ABC: secetur solidum rotundum ABC ab alio plano quomodocunque FNGO ad planum AB normali, ita vt communis solidi & plani interfectio fiat figura FNGO, cuius interfectio cum plano ABC est recta FG: ducatur FK rectæ BC parallella & rectæ AD occurrens in I. concipiatur solidum rotundum, diametrum habens FG, ex circulis conflatum, quorum radii sunt omnes perpendiculares ex recta FG in curuam FO, ita vt diameter figuræ FG per centra infinitorum illorum circulorum transiens, ad illos omnes inclinet in angulo æquali ipsi FGB. ex datis, solido ABC & punctis F, G, oportet etiam exhibere mensuram solidi illius rotundi, quod

quod sit F O G N. AD rectam FG secet in E, & rectæ B C parallella ducatur per E recta X E Z. ex datis punctis F, G, datur punctum E, quoniam supponitur dari A B C figura: infra X Z ducatur quodlibet planum basi B O C N parallellum & cum planis ABC, FOGN, communes intersectiones faciens rectas PQ, RS: manifestum R S esse radium circuli in solido F OGN per R transeuntis; & ob rotunditatem solidi A B C, & sectionem normalem plani ABC ad basem, punctum S est in semicirculo, cuius diameter P Q; & igitur quadratum rectæ



RS æquale est rectangulo P R Q, & circulus ex radio R S æqualis armillæ circulari P R Q; cumque hoc semper fiat inter E & G; erit portio solidi rotundi FO GN infra E æqualis omnibus armillis circularibus inter circulum X E Z & armillam BGC, hoc est, solido excauato æquali portioni solidi rotundi XZCB post ablatum conum cuius vertex E & semidiameter baseos DG: eodem modo probatur portionem solidi rotundi FOGN inter E & F æqualem esse solido excauato F KZX post ablatum conum, cuius vertex E & baseos semidiameter I F: & igitur si a portione solidi rotundi data F K C B,

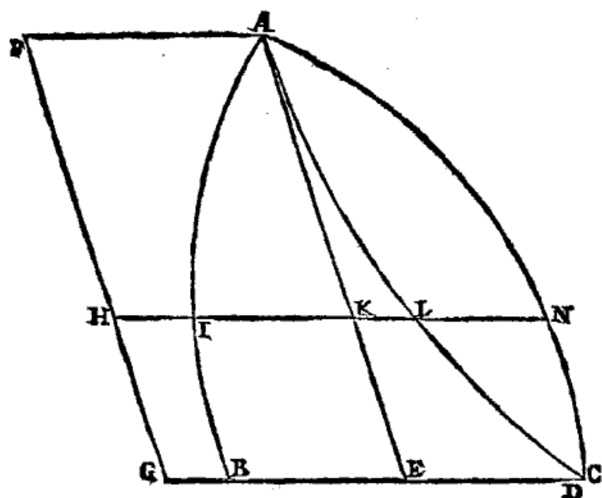
au-

auferatur quadruplum conorum ad verticem datorum FEI, DEG; relinquetur solidum quæsitum rotundum FOGN. Si vero daretur centrum grauitatis solidi rotundi ABC & centrum ablati AFK; daretur etiam centrum grauitatis portionis FKCB, quo dato vna cum centro grauitatis conorum abstrahendorum, datur etiam centrum grauitatis portionis excauatæ, quæ cum solido rotundo FOGN est proportionaliter analoga, vt liquet ex demonstratione; ergo datur etiam centrum grauitatis solidi rotundi FOG. Sunt etiam alii huius propositionis casus, sed hoc intellecto in reliquis nulla restat difficultas.

PROP. 22. PROBLEMA.

SIt solidum rotundum sectum per diametrum AE, plano normali ad basem circularem a diametro BC, & intersectione cum plano efficiens figuram BAC. Sit FAEG parallellogramum, & describatur linea ALD eius naturæ, vt ducta recta HL vtcunque basi BC parallella, rectæ HK, IK, KL, sint continue proportionales. ex data solidi rotundi ABC ad cylindrum datum ratione, oportet figuræ ALDEK quadraturam inuenire. ducatur recta vtcunque HIKLN: quadratum a latere IK, hoc est rectangulum HKL est quarta pars quadrati ex IN; & ideo rectangulum HKL est ad circulum ex diametro IN in ratione composita ex ratione subquadrupla & ex ratione quadrati diametri ad circulum; sed punctum K sumptum est arbitrariè; & proinde cylindricus rectus ex base ALDEK in altitudinem HK est ad solidum rotundum ABC in ratione composita ex ratione subquadrupla & ex ratione quadrati diametri ad circulum; & ideo quadruplum cylindrici prædicti est ad solidum rotundum ABC, vt quadratum diametri ad circulum, hoc est, vt parallellipipedum rectangulum ad cylindrum eiusdem altitudinis sibi inscriptũ, & permutando, quadruplum cylindrici est ad parallellipipedum

pedum vt ſolidum rotundum ad cylindrum; & proinde datur ratio quadrupli cylindrici ad parallellipipedum, & ideo datur cylindrici cubatura, & baſeos ALDEK quadratura.



Ex demonſtratione etiam manifeſtum eſt ſolidum rotundum ABC eſſe figuræ A L D E K analogum tam in magnitudine quam in grauitate, quoniam eadem quæ demonſtrantur de totis, eodem modo demonſtrari poſſunt de partibus eorum proportionalibus; & igitur centrum grauitatis ſolidi rotundi eſt centrum æquilibrii figuræ.

Hinc etiam manifeſtum eſt cylindricum cuius baſis AKED L & altitudo HK duplum eſſe trunci cylindrici recti cuius baſis AIBE ſecti a plano in angulo ſemirecto inclinante, & per rectam AE baſeos planum ſecante; hoc autem trunco dato, datur quilibet alius truncus per eandem rectam A E abſciſſus, quoniam tales trunci inter ſe ſunt vt altitudines, vel vt

cli-

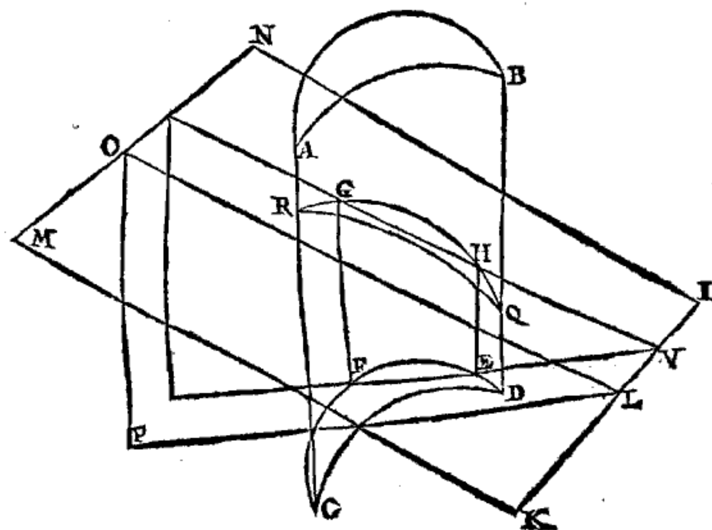
inclinationum tangentes, quod facile est demonstratu.

Nullo quoque negotio demonstratur huius problematis conuersum, nempe ex datis figuræ alicuius quadratura & grauitatis centro; solidi alicuius rotundi ad cylindrum datũ proportionem, & eius centrum grauitatis, inuenire.

PROP. 23. THEOREMA.

Si cylindricus rectus existens super qualibet figura, secetur plano; quilibet truncus huius cylindrici erit ad solidum rotundum ortum ex eius base rotata circa communem sectionem baseos (si opus est) producta & plani secantis, vt altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli, cuius semidiameter est radius rotationis.

SIt cylindricus rectus A B DC super figura quacunque D CF, qui secetur plano quocunque KINM, ita vt commu-



nis intersectio plani cum cylindricò fiat figura R G H Q. producatur planum secans donec baseos D CF planum secet in

recta

recta K I, & planum A B in recta M N: & a puncto quolibet rectę I K nempe L, ducatur eidem I K perpendiculare planũ OLP, secans plana IKMN, DFC, normaliter in rectis O L, L P; sitque perpendicularis in LP recta OP. Supponimus hic K I esse axem rotationis; & rectam P L illi normalem, appellamus radium rotationis. dico truncum cylindrici RQDC esse ad solidum rotundum ortum ex rotatione figurę DE FC circa IK axem rotationis, vt OP altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli, cuius sęmidiameter est radius rotationis L P. per basem DE FC ducatur vbilibet recta E F, a baseos circumferentia vtrinque terminata in E & F, quæ producta, axi rotationis normaliter incidat in puncto V: a punctis E, F, excitentur perpendiculares baseos plano E H, F G, a plano secante terminatæ in H & G, quæ necessario sunt in superficie trunci ob cylindricum rectum, ducaturque V H recta, quæ necessario existit in I K M N plano secante: manifestum est triangula OLP, HEV, rectangula ad P & E (cum habeãt angulos OLP, HEV, æquales inclinationi plani secantis I K M N) esse similia; & ducta recta G V, ob eandem rationem similia sunt triangula HEV, GFV, cumque G F sit parallella rectæ HE, & EF in directum EV; coincident rectæ GV, HV, in vnam rectam plani IKMN, eritque GH E F communis intersectio plani GFV, plano O P L parallelli, cum trunco cylindrici RQDC: patet ergo O P ad PL esse, vt H E ad E V; & ideo vt OP ad circumferentiam circuli cuius semidiameter P L, ita H E ad circumferentiam circuli cuius semidiameter E V; & vt O P ad circumferentiam circuli cuius semidiameter P L, ita (reliquos terminos in eandem altitudinem, nempe semissem rectæ EV, ducendo) triangulum H E V ad circulum cuius semidiameter E V: eodem modo demonstratur esse, vt OP ad circumferentiam circuli, cuius semidiameter PL, ita triangulum GFV ad circulum, cuius semidiameter F V: est igitur totum triangulum G F V ad totum circulum cuius semidiameter F V, ita ablatum triangulum H E V ad

ablatum circulum cuius ſemidiameter E V; & proinde in eadem ratione erit relictum trapezium GF EH ad relictam armillam circularem genitam ex reuolutione rectæ F E circa axem rotationis I K, nempe in ratione O P ad circumferentiam circuli, cuius ſemidiameter L P: atque hæc proportio eodem modo demonſtratur de omnibus rectis ductis in baſe D E F C, quæ (ſi opus eſt) productæ, in axem rotationis I K normaliter incidunt; atque ex omnibus iſtis rectis conflatur ipſa baſis DC; ex omnibus trapeziis ſuper iſtis rectis deſcriptis conflatur truncus RQDC, & ex omnibus armillis ab iſtarum rectarum reuolutione genitis, conflatur ſolidum rotundum genitum a reuolutione baſeos circa axem rotationis I K; & proinde vt vna antecedentium ad vnam conſequẽtium, nimirum OP altitudo cylindri ad circumferentiam circuli cuius ſemidiameter P L radius nempe rotationis, ita omnes antecedentes, nimirum omnia trapezia, hoc eſt, trũcus RQDC, ad omnes conſequentes, nempe omnes armillas circulares, hoc eſt, ſolidum rotundum ortum ex rotatione figuræ DC circa axem IK, quod demonſtrare oportuit.

Hoc theorema eodem modo demonſtratur de trunco ſuperiore, ſi figura AB concipiatur rotari circa rectam M N.

Patet ex demonſtratione truncum RQDC & ſolidum rotundum ortum ex reuolutione baſeos D C circa axem rotationis I K, eſſe quantitates magnitudine & grauitate analogas, quoniam eadem proportio quæ demonſtratur inter integras, eodem modo demonſtratur de earum partibus proportionalibus.

In ſequentibus notandum (quando loquimur de ſuperficie cylindrici vel trunci) nos intelligere ſolam ſuperficiem ſine baſibus; hoc eſt nunquam conſideramus figuras quæ ſunt cylindrici baſes, nec communem ſectionem plani cylindricum ſecantis.

PROP. 24. THEOREMA.

Eisdem positis, quæ in antecedente; superficies trunci erit ad superficiem solidi rotundi orti ex eius base rotata circa communem sectionem baseos (si opus est) producta & plani secantis, vt altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli cuius semidiameter est radius rotationis.

FIgura & præparatio sint eædem sicut in antecedente, dico superficiem trunci RQDC esse ad superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ DEFC circa IK axem rotationis, vt OP altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli cuius semidiameter est radius rotationis LP. in antecedente demonstratum est OP esse ad circumferentiam circuli cujus semidiameter PL, vt HE ad circumferentiam circuli cujus semidiameter EV: atque hæc proportio eodem modo demonstratur de omnibus rectis in superficie trunci RQDC ad basem BEFC perpendicularibus, ad omnes circumferentias circulorum ab earum punctis infimis in circumrotatione descriptas; atque ex omnibus illis rectis conflatur ipsa superficies trunci, & ex omnibus circumferentiis circulorum ab infimis rectarum punctis seu a baseos ambitu descriptis, conflatur superficies solidi rotundi orti ex rotatione baseos circa axem IK; & ideo vt vna antecedentium ad vnam consequentium, nempe OP altitudo cylindrici ad circumferentiam circuli cuius semediameter est LP radius rotationis, ita omnes antecedentes, hoc est, superficies trunci RQDC, ad omnes consequentes, hoc est, superficiem solidi rotundi orti ex rotatione baseos DEFC circa axem rotationis IK, quod erat demonstrandum. Hoc etiam theorema demonstratur eodem modo de trunco superiore si figura AB concipiatur rotari circa rectam MN.

Patet ex demonstratione superficiem trunci RQDC & superficiem solidi rotundi orti ex rotatione baseos DEFC

circa axem rotationis IK, esse quantitates magnitudine & grauitate analogas, quoniam eadem proportio quæ demõstratur esse inter totas, eodem modo demonstratur esse inter partes earum proportionales.

PROP. 25. THEOREMA.

Eisdem positis, supponendo angulum inclinationis, Plani secantis cum base cylindrici (si opus est) producta, esse semirectum; Dico quadratum semidiametri circuli æqualis superficiei solidi rotundi duplum esse superficiei trunci.

Est enim ex præcedente, vt altitudo cylindrici ad circũferentiam circuli cuius semidiameter est radius rotationis, ita superficies trunci ad superficiem solidi rotundi: in hoc autem casu, quando angulus inclinationis est semirectus, altitudo cylindrici est æqualis radio rotationis; & ideo in nostro casu, vt semidiameter ad sui circumferentiam, ita superficies trunci ad superficiem solidi rotundi; vt autem semidiameter ad circumferentiam ita semissis quadrati semidiametri ad circulum; & ideo vt semissis quadrati semidiametri ad circulum, ita superficies trunci ad superficiem solidi rotundi; & conuertendo & permutando, circulus est ad superficiem solidi rotundi vt semissis quadrati semidiametri ad superficiem trunci; sed circulus supponitur æqualis superficiei solidi rotundi; & igitur semissis quadrati semidiametri illius circuli æqualis est superficiei trunci; & ideo quadratum semidiametri est duplum superficiei trũci, quod demonstrandum erat.

Duæ præcedentes propositiones eodem prorsus modo demonstrantur de superficiebus rotundis genitis ex rotatione vnius vel plurium linearum quarumcunque siue rectarum, curuarum vel mixtarum, figuram non claudentium; semper enim ad superficies cylindrici recti super linea vel lineis

neis a plano resectas, superficies rotundæ ex lineæ vel linearum rotatione genitæ prædictas habent rationes.

PROP. 26. THEOREMA.

Eisdem positis quæ in antecedente; Dico cubum semidiametri sphæræ æqualis solido rotundo esse ad truncum vt tria ad duo.

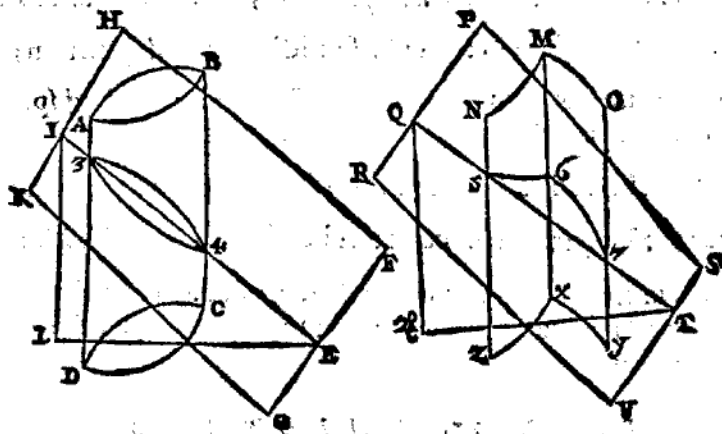
Est enim (in hoc casu) truncus ad solidum rotundum vt semidiameter ad sui circumferentiam, hoc est, vt duplum quadrati semidiametri ad quadruplum circuli, hoc est, vt $\frac{2}{3}$ cubi semidiametri ad sphæram; est igitur truncus ad solidum rotundum, vt $\frac{2}{3}$ cubi semidiametri ad sphæram; & conuertendo & permutando, solidũ rotundum est ad sphæram vt truncus ad $\frac{2}{3}$ cubi semidiametri; sed sphæra supponitur æqualis solido rotundo; & ideo $\frac{2}{3}$ cubi semidiametri sphæræ est æqualis trunco, at cubus semidiametri ad sui $\frac{2}{3}$ rationem habet quam 3 ad 2; & ideo cubus semidiametri sphæræ ad truncum eandem habet rationem, quod demonstrandum erat.

PROP. 27. THEOREMA.

Si duo cylindrici recti quicunque æquialti, secentur a planis quibuscunque, vnusquisque in duos truncos; proportio solidi rotundi orti ex rotatione baseos cylindrici circa communem baseos (si opus est) producta cum Plano secante intersectionem, ad solidum rotundum ortum ex simili alterius cylindrici baseos rotatione, est composita ex directa proportione radiorum rotationis & directa proportione truncorum cylindrici inferiorum.

Sit

SInt duo cylindrici recti æquialti ABCD, NMOYXZ, basibus D C, X Y Z, insistentes, a planis intersecti, vtrusquisque in duos truncos; nempe cylindricus A B C D sit intersectus a plano KHFG in truncos AB 43, 43 DC, & cylindricus NMOYXZ a plano PSVR in truncos NMO765, 765 ZXY. Sint plani HFGK cum basium planis cylindrici parallellarum (si opus est) productis, DC, OB, intersectiones, rectæ KH, GF; sintque plani PSVR cum planis basium cylindrici parallelarum NMO, ZXY, (si opus est) productis, in-



terfectiones, rectæ R P, V S. Sintque plana rectis F G, S V, normalia, quæ plana secantia intersecant in rectis IE, QT, & plana basium DC, ZXY, (si opus est) producta in rectis LE, &T; sintque anguli ILE, Q&T, recti. Manifestum est ex hujus 23, positis HFGK, PS VR, planis secantibus & GF, VS, rotationis axibus, LE, &T, esse rotationis radios. Dico igitur solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ D C circa G F, esse ad solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ Z

XY

XY circa VS, in ratione composita ex proportione trunci 34 CD ad truncum 567 YXZ & ex proportione radii rotationis LE ad radium rotationis &T. Ratio solidi rotundi orti ex figura DC ad solidum ortum ex figura ZXY, est composita, ex ratione solidi rotundi ex DC orti ad truncum 34 CD, ex ratione trunci 34 CD ad truncum 567 YXZ, & ex ratione trunci 567 YXZ ad solidum rotundum ex ZXY ortum; sed ratio solidi rotundi ex DC orti ad truncum 34 CD est æqualis rationi circumferentię circuli ex semidiametro LE descripti ad IL altitudinem cylindrici: & ratio trunci 567 YXZ ad solidum rotundum ex YXZ ortum est æqualis rationi Q& seù IL altitudinis cylindrici ad circumferentiam circuli ex semidiametro T& descripti; & proinde ratio solidi rotundi orti ex DC ad solidum rotundum ortum ex ZXY est composita, ex ratione trunci 34 CD ad truncum 567 YXZ, ex ratione circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad rectam IL, & ex ratione rectæ IL ad circumferentiam circuli ex semidiametro T& descripti; sed hæ duæ postremæ rationes componunt rationem circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad circumferentiam circuli ex semidiametro T& descripti, quæ eadem est cum ratione semidiametri LE ad semidiametrum T&: & proinde solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ DC circa axem FG est ad solidum rotundum ex rotatione figuræ XYZ circa axem VS in ratione composita ex proportione trunci inferioris 34 CD ad truncum inferiorem 567 YXZ, & ex proportione radii rotationis EL ad radium rotationis T&, quod demonstrandum erat. 25 huius.

PROP. 28. THEOREMA.

Eisdem positis quæ in antecedente; Proportio superficiei solidi rotundi orti ex rotatione baseos cylindrici circa communem baseos (si opus est) producta cum plano secante intersectionem, ad superficiem

ciem solidi rotundi orti ex simili alterius cylindrici baseos rotatione, est composita ex directa proportione radiorum rotationis & directa proportione superficierum truncorum inferiorum.

Figuræ & præparatio sint eædem sicut in antecedente. Dico superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ DC circa GF esse ad superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ ZXY circa VS in ratione composita ex proportione superficiei trunci 34CD ad superficiem trunci 567 YXZ & ex proportione radii rotationis LE ad radium rotationis &T. Ratio superficiei solidi rotundi orti ex figura DC ad superficiem solidi rotundi orti ex figura ZXY est composita, ex ratione superficiei solidi rotundi ex DC orti ad superficiem trunci 34CD, ex ratione superficiei trunci 34CD ad superficiem trunci 567 YXZ, & ex ratione superficiei trunci 567 YXZ ad superficiem solidi rotundi ex ZXY orti; sed ratio superficiei solidi rotundi ex DC orti ad superficiẽ
24 huius. trunci 34CD est æqualis rationi circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad IL altitudinem cylindrici: & ratio superficiei trunci 567YXZ ad superficiem solidi rotundi ex YXZ orti est æqualis rationi Q& seu IL altitudinis cylindrici ad circumferentiam circuli ex semidiametro T& descripti; & proinde ratio, superficiei solidi rotundi orti ex DC ad superficiem solidi rotundi orti ex ZXY, est composita ex ratione superficiei trunci 34CD ad superficiem trunci 567 YXZ, ex ratione circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad rectam IL, & ex ratione rectæ IL ad circumferentiam circuli ex semidiametro T&; sed hæ duæ postremæ rationes componunt rationem circumferentiæ circuli ex semidiametro LE descripti ad circumferentiam circuli ex semidiametro T& descripti, quæ eadem est cum ratione semidiametri LE ad semidiametrum T&: & proinde superficies solidi rotundi orti ex rotatione figuræ DC circa axem FG est ad superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figu-

figuræ XYZ circa axem VS in ratione composita, ex proportione superficiei trunci inferioris 34 C D ad superficiem trũci inferioris 567 Y X Z & ex proportione radii rotationis E L ad radium rotationis T&, quod demonstrandum erat.

Hoc Theorema etiam locum habet eodemque modo demonstratur in superficiebus rotundis genitis a rotatione lineæ vel linearum quarumcunque figuram non comprehendentium.

PROP. 29. THEOREMA.

Si super qualibet figura circa axem intelligatur cylindricus rectus, ita sectus a plano in duos truncos, vt planum per oppositarum cylindrici basium axes ductum, fiat plano secanti normale; truncus vnus erit ad truncum alterum reciprocè, vt partes radii rotationis resecta a centro grauitatis figura.

SVper qualibet figura L K M circa axem K N sit cylindricus rectus ABDMLK sectus in truncos ABDZY2, ZY2 KLM, a plano E T V G ad planum ACNK, per oppositarum cylindrici basium axes AC, KN, ductum, normali: sint P, O, centra grauitatis basium oppositarum, quæ iungantur recta PO. Producatur planum secans, donec axes AC,KN (si opus est) productos intersecet in punctis F, S; & in eosdem axes (si opus est) productos sint perpendiculares FI, SQ; manifestum est FISQ esse parallellogrammum rectangulum, item FI esse cylindrici altitudinem, & IS rotationis radium, quippe ad intersectionem plani secantis & baseos L K M nempe rectam TV est perpendicularis, quoniam ducitur in plano F QSI, quod vtrique plano & secanti & baseos L K M est normale. Dico truncum ABDZY2 esse ad truncum 2 Y Z MLK vt reciproce I O ad OS. a mediis punctis rectarum FI, QS, nempe H, R, ducantur rectæ HS, RF, necnon HR secans OP in X; erunt itaque inter se parallellæ &

æquales FI, PO, QS, item FQ, HR, IS, item FR, HS. Quoniam FR bifariam ſecat QS, bifariam quoque ſecabit in triangulo FQS omnes rectas ipſi QS æquidiſtantes; & proinde bifariam ſecabit omnes diametros rectangulorum in trunco ABDZY2 a plano FISQ normaliter ſecatorum; & ideo tranſibit per centra grauitatis omnium eorundem rectangulorum, cumque ipſe truncus conflectur ex omnibus iſtis rectangulis; idcirco tranſibit etiam recta FR per centrum grauitatis ipſius trunci, hoc ſupponatur eſſe *3*: eodem modo demonſtratur in HS eſſe centrum grauitatis trunci YZMLK2: cum ergo X medium punctum rectæ OP ſit centrum grauitatis totius cylindrici; ſi a *3* per X producatur recta *3*X4 donec rectam HS interſecet in 4, erit 4 centrum grauita-

tis

tis trunci YZMLK2: & quia triangula XR3, XH4, sunt similia propter parallellas R F, H S, est vt X 4 ad X 3 ita X H ad X R, hoc est, IO ad OS; sed vt X4 ad X3 ita truncus A B D Z Y 2 ad truncum YZM LK2; & proinde ut truncus ABDZY2 ad truncum YZKMK2 ita reciproce I O ad O S, quod demonstrandum erat.

CONSECTARIVM.

ET proinde componendo totus cylindricus A B D M L K est ad truncum inferiorem Y Z ML K2 vt radius rotationis IS ad distantiam inter centrum grauitatis figuræ & axem rotationis eiusdem nempe OS.

PROP. 30. THEOREMA.

Eisdem positis quæ in antecedente; superficies trunci vnius est ad superficiem trunci alterius reciproce, vt partes radij rotationis resectæ a centro grauitatis perimetri figuræ.

EAdem sit figura & præparatio, quæ in antecedente, hoc solum excepto, quod O, P, puncta nunc supponantur esse contra grauitatis perimetrorum basium oppositarum. Dico superficiem trunci ABD ZY2 esse ad superficiem trunci 2YZMLK, vt reciproce IO ad OS. A mediis punctis rectarum FI, QS, nempe H, R, ducantur rectæ HS, RF, necnon HR secans OP in X; erunt itaque inter se parallellæ & æquales rectæ FI, PO, QS, item FQ, HR, IS, item FR, H S. Quoniam FR bifariam secat QS, bifariam quoque secabit in triangulo FQ S omnes rectas ipsi QS æquidistantes, & proinde bifariam secabit omnes diametros rectangulorū in trunco ABD ZY2 a plano F I S Q normaliter secatorum; & ideo transibit per omnia centra grauitatis oppositorum laterum basi cylindrici perpendicularium vniuscuiusque ex illis rectangulis, quo-

niam in medio diametri est centrum grauitatis laterum oppositorum; cumq; ipsa trunci superficies conflетur ex omnibus istis lateribus oppositis basi cylindrici perpendicularibus, idcirco transibit etiam recta FR per centrum grauitatis superficiei ipsius trunci, hoc supponatur 3: eodem modo demonstratur in HS esse centrum grauitatis superficiei trunci YZMLK2; cum ergo X medium punctum rectæ OP sit centrũ grauitatis totius superficiei cylindrici, si a 3 per X producatur recta 3X4 donec rectam HS intersecet in 4, erit 4 centrũ grauitatis superficiei trunci YZMLK2: & quia triangula XR3, XH4, sunt similia propter parallellas RF, HS, est vt X4 ad X3 ita XH ad XR, hoc est IO ad OS; sed vt X4 ad X3 ita superficies trunci ABDZY2 ad superficiem trunci YZMLK2; & proinde, vt superficies trunci ABDZY2 ad superficiem trunci YZMLK2, ita reciproce IO ad OS quod demonstrandum erat.

CONSECTARIVM.

ET componendo tota superficies cylindrici ABDMLK est ad superficiem trunci inferioris YZMLK2 vt radius rotationis IS ad interceptam inter centrum grauitatis perimetri figuræ & axem rotationis eiusdem nempe OS.

Demonstrantur quoque hæc eodem modo in truncis insistentibus lineæ vel lineis quibuscunque figuram non comprehendentibus, si modo sint ad axem.

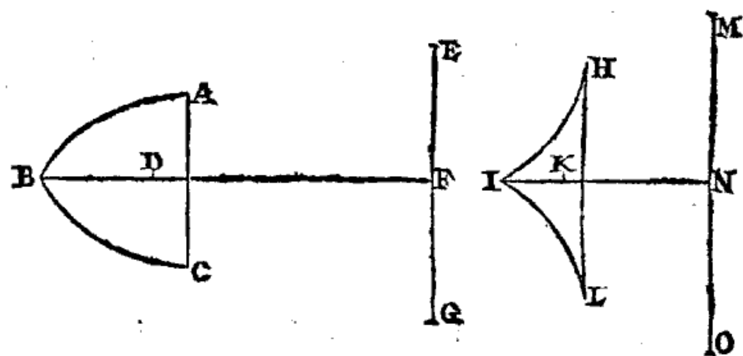
Duæ præcedentes propositiones sunt etiam verę in omni cylindrico, sed intricata est constructio generali demonstrationi inseruiens, & ideo nostrum intentum alio modo euincemus.

PROP. 31. THEOREMA.

Si sint duæ figuræ quæcunque circa axes, quæ sic rotentur vt axes rotationis sint figuræ vniuscuiusque axi normales; ratio vnius solidi orti ex tali rotatione ad aliud solidum ex eadem genitum, com-

componitur ex ratione directa figuræ ad figuram, & ex ratione directa interceptæ inter centrum grauitatis & axem rotationis vnius figuræ ad similem interceptam alterius figuræ.

SInt duę figurę quęcunque ABC, HIL, circa axes BF, IN, quę rotentur circa rectas EG, MO, axes figurarum (si opus est) productos BF, IN, normaliter secantes in punctis F, N, sintque figurarum ABC, HIL, centra grauitatis D, K. Dico rationem, solidi orti ex figura ABC rotata circa rectã EG ad solidum ortum ex figura HIL rotata circa rectam MO, componi ex ratione figurę ABC ad figuram HIL & ex ratione DF ad KN. Super figuris ABC, HIL, intelligantur cylindrici recti ęquialti secti a planis transeuntibus per EG, MO, rectas, vnusquisque in duos truncos nempe superiorem & inferiorem. Ratio solidi ex ABC orti ad solidum ex HIL ortum, componitur ex ratione trunci inferioris cylindrici super ABC ad truncum inferiorem cylindrici super HI



L, & ex ratione radii rotationis figurę ABC ad radium rotationis figurę HIL; sed truncus inferior cylindrici super ABC est ad truncum inferiorem cylindrici super HIL in ratione composita, ex ratione trunci inferioris cylindrici super ABC ad totum cylindricum super ABC, ex ratione to-

tius cylindrici ſuper ABC ad totum cylindricum ſuper HIL, & ex ratione totius cylindrici ſuper H I L ad truncum ſui inferiorem: ſed truncus inferior cylindrici ſuper A B C eſt ad totum cylindricum, vt FD ad rotationis radium figurę ABC ex conſectario huius 29 conuertendo, & cylindricus ſuper ABC eſt ad cylindricum ſuper HIL vt figura A B C ad figuram HIL, item cylindricus ſuper H I L eſt ad truncum ſuum inferiorem vt radius rotationis figurę HIL ad KN, ex conſectario huius 29; & proinde ratio trunci inferioris cylindrici ſuper ABC ad truncum inferiorem cylindrici ſuper HIL cõponitur ex ratione rectæ D F ad rotationis radium figuræ A BC, ex ratione figuræ A B C, ad figuram H I L, & ex ratione radii rotationis figuræ HIL ad rectam K N: & ideo ratio ſolidi orti ex rotatione figuræ ABC ad ſolidum ortum ex rotatione figuræ H I L componitur, ex ratione figuræ ABC ad figuram H I L, ex ratione rectæ D F ad radium rotationis figuræ ABC, ex ratione radii rotationis figuræ ABC ad radiũ rotationis figuræ H I L, & ex ratione radii rotationis figuræ HIL ad rectam K N; ſed tres poſtremæ rationes componunt rationem D F ad K N; & igitur ratio ſolidi orti ex rotatione figuræ ABC circa EG ad ſolidum ortum ex rotatione figuræ HIL circa M O componitur ex ratione figuræ A B C ad figuram HIL, & ex ratione interceptæ inter centrum grauitatis figuræ A B C & eius axem rotationis, nempe D F, ad interceptam inter centrum grauitatis figuræ H I L & eiuſdem axem rotationis, nempe KN, quod demonſtrare oportuit.

PROP. 32. THEOREMA.

Eiſdem poſitis, quæ in antecedente; ratio, ſuperficiei vnius ſolidi orti ex tali rotatione ad ſuperficiem alterius ſolidi ex eadem geniti, componitur ex ratione directa perimetrorum figurarum & ex ratione directa interceptarum inter centra grauitatis perimetrorum & axes rotationis.

Eadem

Eædem sint figuræ & præparatio quæ in antecedente, hoc solum excepto, quod D, K, puncta, nunc supponatur esse centra grauitatis perimetrorum figurarum. Dico rationem superficiei solidi orti ex figura A B C rotata circa rectam E G ad superficiem solidi orti ex figura HIL rotata circa rectam MO, componi ex ratione perimetri ABC ad perimetrum H I L & ex ratione DF ad K N. Super figuris A B C, H I L, intelligantur cylindrici recti æquialti, secti a planis transeuntibus per E G, M O, rectas, vnusquisque in duos truncos, nempe superiorem & inferiorem. Ratio superficiei solidi ex A B C orti ad superficiem solidi ex H I L orti, componitur ex ratione superficiei trunci inferioris cylindrici super A B C ad superficiem trunci inferioris cylindrici super H I L, & ex ratione radii rotationis figuræ A B C ad radium rotationis figuræ H I L; sed superficies trunci inferioris cylindrici super A B C est ad superficiem trunci inferioris cylindrici super H I L in ratione composita, ex ratione superficiei trunci inferioris cylindrici super ABC ad totam superficiem cylindrici super ABC, ex ratione totius superficiei cylindrici super ABC ad totam superficiem cylindrici super H I L & ex ratione totius superficiei cylindrici super H I L ad superficiem trunci sui inferioris: sed superficies trunci inferioris cylindrici super A B C est ad totam superficiem cylindrici vt FD ad rotationis radium figuræ ABC ex consectario huius 30 conuertendo, & superficies cylindrici super A B C est ad superficiem cylindrici super HIL, vt perimeter A B C ad perimetrum HIL, item superficies cylindrici super H I L est ad superficiem sui trunci inferioris vt radius rotationis figuræ H I L ad K N; & proinde ratio superficiei trunci inferioris cylindrici super ABC ad superficiem trunci inferioris cylindrici super HIL componitur, ex ratione rectæ D F ad radium rotationis figuræ ABC, ex ratione perimetri ABC ad perimetrum HIL & ex ratione radii rotationis figuræ HIL ad rectam K N; & ideo ratio superficiei solidi orti ex rotatione

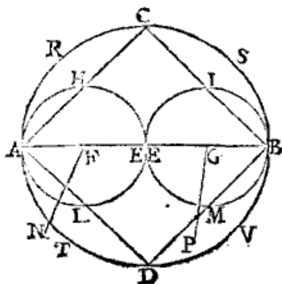
fi-

tura di Vela, con altro, che qui pure dirò poco appresso.

Ma or frattanto vi dico, e voi stessi, dal dettovi, ritroverete, che su questa medesima Vela Fiorentina si posson assegnare altre Vele infinite, ed altre parte di essa, le quali sien tutte quadrabili, quali per esemplo sarebbono col mantener all' intera Vela quella delle due sue larghezze da' piedi, cioè quello de' due assi orizzontali dell' Emisfero fra loro a squadra, che congiugne le cocche, o pur le punte A, B, lembi estremi della Vela intera, e collo scor-

Veli tetragonismo demonstrando, cum aliis, quæ hic etiam non diù post subiungere aggrediar.

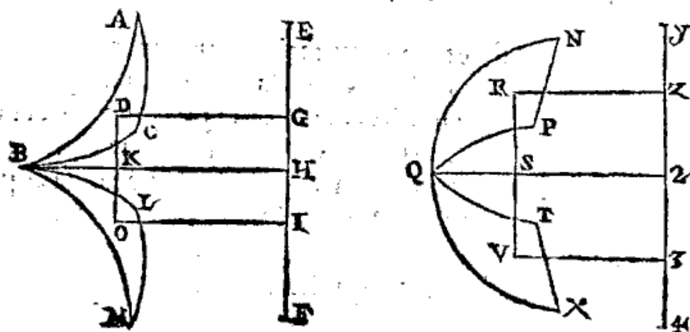
Nunc autem intereà moneo, vosque ipsi ex hactenus dictis facilè deprehendetis, super hoc ipso Florentino Velo infinita alia Vela posse assignari, aliasque ipsius partes, omnes tetragonismi capaces (9), quæ exempli gratia fierent servata integro Velo illa suarum duarum ad pedes latitudinum, illo scilicet duorum Hemispherij axium horizontalium, se normaliter invicem secantium, qui iungit terminos, seu cuspides A, B, extremos integri Carbasi



ciar l' altra larghezza, o distanza fra i rimanenti due lembi opposti E, E, col fargli terminare sull' arco di quel mezzo cerchio verticale, (il qual passa per gli stessi lembi E, E dell' intera) per distanze eguali dal polo C, o vertice di tal' arco: poichè in tal maniera ciascuna di quest' altre infinite Vele, più strette per un verso, che per l' altro, si può ridurre in quadrato con esattezza geometrica, e far sì, che questa alla Vela intera abbia qualunque data proporzione di minoranza, e che perciò ella sia eguale a qualsisia dato quadrato minor di quello dell' asse, a cui è uguale la Vela intera: essendochè la più stretta, o secondaria, che voglia dirsi, alla primaria sta sempre, come la retta congiu-

limbos, & diminuta altera latitudine, seu distantia inter duos reliquos oppositos limbos E, E, ità ut terminent ad arcum illius semicirculi verticalis (qui transit per eosdem integri Carbasi limbos E, E) per æqualem utrinque distantiam a polo C, seu vertice talis arcus: sic enim, quodvis infinitorum eiusmodi Velorum, uno ex latere, quàm ex alio strictiorum, exactissimè geometricè quadrari potest, ità ut hoc ad integrum Velum quamcumque obtineat datam proportionem minoris inæqualitatis, ac propterea æquale sit cuicumque dato quadrato, minori, quàm sit quadratum axis, cui integrum Velum æquale est; quandoquidem strictius Velum, seu secundarium, si dicere

rectis DG, RZ, ducantur rectæ BH, Q2, figuras ABC, NQP, tangentes in B, Q; & circa rectas BH, Q2, ficut axes, concipiantur reuolui figuræ A B C, Q N P, donec ex altera axium parte planum attingentes, efficiant figuras BLM, QTX, sibi ipsis æquales, similes, & ad rectas BH, EF; Q2, Y4, eandẽ prorsus positionem habentes: sint figurarum B L M, Q T X, centra grauitatis, O, V; ducantur in rectas EF, Y4, perpendiculares OI, V3, iungantur quoque rectæ DO, RV, rectas BH, Q2, intersecantes in punctis K, S: manifestum est pun-



ctum K esse centrum grauitatis integræ figuræ B A C B L M circa axem B H, item punctum S esse centrum grauitatis figuræ integræ QNPQTX circa axem Q2; patet quoque rectas DG, KH, OI; item RZ, S2, V3, esse inter se æquales. Quoniã figuræ BACBLM, QNPQTX sunt circa axes BH, Q2, axibus rotationis E F, Y4, normales; igitur solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ B A C B L M circa rectam EF est ad solidum rotundum ortum ex rotatione figuræ QNP QTX in ratione composita ex ratione figuræ B A C B L M ad figuram QNPQTX & ex ratione KH ad S2 per huius 31; sed solidum ortum ex figura BAC BLM rotata circa E F est duplum solidi orti ex figura BAC circa eandem EF rotata; item solidum ortum ex figura QNP QTX rotata circa rectam Y 4 est duplũ

solidi orti ex figura QNP rotata circa eandem Y4; figurâ quoque BACBLM dupla est figuræ BAC, & figura QNPQ TX figuræ QNP; cumque dimidia sint in eadem ratione cum suis duplis; solidum rotundum ortum ex figura ABC rotata circa rectam EF erit ad solidum rotundum ortum ex figura NQP rotata circa rectam Y4 in ratione composita ex ratione figuræ ABC ad figuram NQP & ex ratione KH ad S2, seu DG ad RZ, quod demonstrare oportuit.

CONSECTARIVM.

Sint sequitur, si centra grauitatis figurarum a rotationis axibus æqualiter distent, solida rotunda ex figurarum rotatione genita esse in directa ratione ipsarum figurarum, quod si figuræ ipsæ sint æquales, sequitur solida rotunda ex earum rotatione genita esse in ratione directa interceptarum inter centra grauitatis & rotationis axes: quod si interceptæ sint æquales & figuræ, etiamsi inter se dissimillimæ, solida rotunda ex illis orta æqualia erunt.

SCHOLIVM.

EX dictis manifestum est inter duas quascunque figuras tres esse rationes, nempe; figuræ ad figuram, solidi rotundi ex rotatione vnius figuræ geniti, ad solidum rotundum ex rotatione alterius figuræ genitum, & interceptę inter centrum gravitatis & axem rotationis vnius figuræ ad similem interceptam alterius figurę, e quibus duas datas tertiam ignotam semper patefacere.

PROP. 34. THEOREMA.

Si sint duæ figuræ quæcunque, quæ rotentur circa axes quoscunque; ratio superficiei unius solidi orti ex tali rotatione ad superficiem alterius

terius solidi ex eadem genitis, componitur ex directa ratione perimetri ad perimetrum & ex directa ratione intercepta inter centrum gravitatis perimetri & axem rotationis unius figuræ ad similem interceptam alterius figuræ.

SInt duæ figuræ quæcunque ABC, NQP, quæ rotentur circa rectas EF, Y4; sintque centra gravitatis perimetrorum D, R, a quibus in axes rotationis EF, Y4, demittantur rectæ perpendiculares DG, RZ. dico rationem superficiei solidi orti ex figura ABC rotata circa rectam EF ad superficiem solidi orti ex figura NQP rotata circa rectam Y4 componi, ex ratione perimetri ABC ad perimetrum NQP & ex ratione DG ad RZ. parallellæ rectis DG, RZ, ducantur rectę BH, Q2, figuras ABC, NQP, tangentes in B, Q; & circa BH, Q2, sicut axes concipiantur reuolvi figuræ ABC, QNP, donec ex altera axium parte in idem planum reuolutæ figuras efficiant BLM, QTX, sibi ipsis æquales, similes, & ad rectas BH, EF; Q2, Y4, eandem omnino positionem habentes. Sint perimetrorum BLM, QTX, centra grauitatis O, V; ducantur in rectas EF, Y4, perpendiculares OI, V3; iungantur rectæ DO, RV, rectas BH, Q2, interſecantes in punctis K, S; manifestum est punctum K esse centrum grauitatis integri perimetri BACBLM; estque figura BACBLM circa axem BH; eodem modo punctum S est centrum gravitatis integri perimetri figurę QNPQTX circa axem Q2; patet quoque rectas DG KH, OI, item RZ, S2, V3, esse inter se æquales. quoniam figura BACBLM, QNPQTX, sunt circa axes BH, Q2, axibus rotationis EF, Y4, normales; igitur superficies solidi rotundi orti ex rotatione figuræ BACBLM circa rectam EF est ad solidi rotundi superficiem orti ex rotatione figurę QNPQTX in ratione composita ex ratione perimetri BACBLM ad perimetrum QNPQTX & ex ratione KH ad S2; sed superficies solidi orti ex figura BACBLM rotata circa EF est dupla superficiei solidi orti ex figura BAC rotata circa eandem E 32 huius.

I 2 F, item

F, item superficies solidi rotundi orti ex figura QNPQTX rotata circa rectam Y4 est dupla superficiei solidi orti ex figura QNP rotata circa eandem Y4; perimetrum quoque BACBLM duplum est perimetri BAC, & perimetrum QNPQTX perimetri QNP (hoc est si figuræ se inuicem tangant in puncto solummodo; quod si se tetigerint in recta linea, oportet imaginari aliquam distantiolam inter figurarum vniones, vt generalis fiat demonstratio) cumque dimidia sint in eadem ratione cum suis duplis, superficies solidi rotundi orti ex figura ABC rotata circa rectam EF erit ad superficiem solidi rotundi orti ex figura NQP rotata circa rectam Y4 in ratione composita, ex ratione perimetri ABC ad perimetrum NQP & ex ratione KH ad Sa seu DG ad RZ, quod demonstrare oportuit.

CONSECTARIVM.

HInc sequitur, si centra grauitatis perimetrorum a rotationis axibus æqualiter distent, superficies solidorum rotundorum ex rotatione genitorum esse in directa ratione ipsorum perimetrorum, quod si ipsa perimetra sint ęqualia, superficies solidorum rotundorum ex rotatione genitorum esse in ratione directa interceptorum inter centra grauitatis perimetrorum & rotationis axes, quod si interceptę sint ęquales & perimetra ęqualia, superficies solidorum rotundorum semper esse ęquales.

SCHOLIVM.

EX dictis ergo manifestum est inter duas quascunque figuras tres alias esse rationes a tribus pręcedentibus diuersas, nempe perimetri ad perimetrum, superficiei solidi rotundi ex rotatione vnius figurę geniti ad superficiem solidi rotundi ex rotatione alterius figurę geniti, & in-

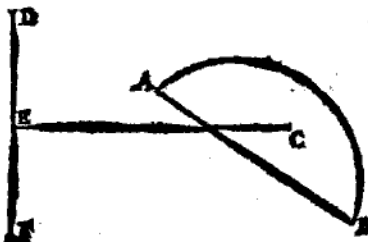
interceptę inter centrum grauitatis perimetri & axem rotationis vnius figurę ad similem interceptam alterius figurę, e quibus duas datas tertiam ignotam semper patefacere.

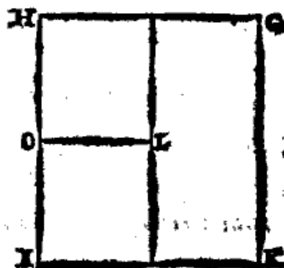
Eodem modo demonstrantur hęc omnia vniuersaliter in omnibus, linea, vel lineis figuram non comprehendentibus, ita vt omnium demonstrationum geometricarum hę sint maxime vniuersales.

PROP. 35. THEOREMA.

Omne solidum rotundum aequale est cylindrico recto cuius basis est figura ex cuius rotatione gignitur solidum & altitudo circumferentia circuli in qua circumuoluitur centrum grauitatis figurae.

SIt figura quæcunque AB cuius grauitatis centrum C; ex figuræ AB rotatione circa rectam DF fiat solidum rotundum, quod dico esse æquale cylindrico cuius basis AB figura & altitudo circumferentia circuli, in qua circumrotatur centrum grauitatis C. Sit rectangulum HGKI





cuius centrum grauitatis L; ex rotatione rectanguli HGKI circa latus HI concipiatur fieri cylindrus, & ex grauitatum cen-

centris C, L, in rotationis axes D F, H I, demittantur perpendiculares rectæ C E, L O, quæ sunt rotationis radii: manifestum est cylindrum genitum ex rotatione rectanguli H K circa H I æqualem esse solido cuius basis est circulus ex radio I K & altitudo H I, hoc est solido cuius basis est rectangulum ex I K in semicircumferentiam circuli ex radio I K vel totam circumferentiam ex radio O L & altitudo H I, quod idem est cum solido cuius basis est rectangulum H K & altitudo circumferentia circuli ex radio O L; sed cylindrus ex rotatione
33 huius. HK circa HI est ad solidum rotundum ex rotatione AB circa DF in ratione composita ex proportione figuræ HK ad figuram AB & rectæ OL ad rectam E C seu circumferentiæ radii OL ad circumferentiam radii E C, atque solidum cuius basis HK & altitudo circumferentia radii O L, seu cylindrus genitus ex rotatione figurę HK circa HI, est ad solidum cuius basis A B & altitudo circumferentiæ radii E C in eadem ratione; & ideo cylindrus ex rotatione figurę H K circa H I est ad solidum rotundum ex rotatione figuræ AB circa DF vt idem prædictus cylindrus ad solidum cuius basis A B & altitudo circumferentia circuli ex radio E C; & proinde solidum rotundum ex rotatione figurę AB circa D F æquale est cylindrico cuius basis A B & altitudo circumferentia radii E C, quod demonstrare oportuit.

PROP. 34. THEOREMA.

Omnis solidi rotundi superficies æqualis est rectangulo cuius basis est Perimeter figuræ ex cuius rotatione gignitur solidum & altitudo circumferentia in qua circumfertur centrum grauitatis Perimetri figuræ.

EIsdem positis quæ in antecedente, sint centra gravitatis perimetrorum figurarum H K, A B, puncta L, C; dico superficiem solidi rotundi orti ex rotatione figuræ AB circa

D F

DF esse æqualem rectangulo cuius basis est perimeter figuræ A B & altitudo circumferentia radii E C. manifestum est superficiem cylindri geniti ex rotatione rectanguli HK circa HI ęqualem esse rectangulo cuius basis est circumferentia radii IK & altitudo GK vna cum IK, hoc est rectangulo cuius basis circumferentia radii O L & altitudo totus figuræ ambitus HG + GK + KI + IH, quod idem est cum rectangulo cuius basis est rectanguli H K ambitus & altitudo circumferentia radii O L ; sed superficies cylindri geniti ex rotatione rectanguli H K circa HI est ad superficiem solidi rotundi geniti ex figuræ AB rotatione circa DF in ratione composita ex proportione ambitus figuræ HK ad ambitum figuræ AB & ex proportione rectæ O L ad rectam E C seu circumferentiæ radii OL ad circumferentiam radii E C; atque rectangulum cuius basis est ambitus figuræ H K & altitudo circumferentia radii O L, seu superficies cylindri geniti ex rotatione rectanguli H K circa HI, est ad rectangulum cuius basis est ambitus figuræ A B & altitudo circumferentia radij E C in eadem ratione ; & ideo superficies cylindri geniti ex rotatione rectanguli HK circa HI est ad rectangulum, cuius basis est ambitus figuræ A B & altitudo circumferentia radii E C, vt idem superficies ad superficiem solidi rotundi geniti ex rotatione figuræ A B circa axem rotationis D F; & proinde superficies solidi rotundi orti ex rotatione figuræ A B circa D F æqualis est rectangulo cuius basis est ambitus figuræ A B & altitudo circumferentia radij E C, quod demonstrare oportuit.

14 huius.

Non dissimili fere methodo demonstratur hæc propositio, etiamsi perimeter figuræ non sit clausus.

PROP. 37. THEOREMA.

Si cylindricus rectus secetur plano ad basem seminormali; truncus inferior æqualis erit cylindrico cuius basis eadem est cum cylin-

drici

drici propositi base, & altitudo, intercepta recta inter centrum gravitatis baseos & communem intersectionem baseos & plani secantis.

SInt eędem figuræ, quæ in antecedente: super figurâ AB (cuius gravitatis centrum C) concipiatur cylindricus rectus Sectus à plano basem AB seminormaliter secante in recta DF: dico truncum eius inferiorem æqualem esse cylindrico super base AB habenti altitudinem EC. Solidum rotundum ortum ex rotatione figurę AB circa rectam DF æquale est cylindrico cuius basis AB & altitudo circumferentia radij EC; atque idem solidum rotundum est ad truncum inferiorem cylindrici recti super AB resectam à plano basem AB seminormaliter secante in recta DF ut circumferentia radij CE ad radium CE; sed cylindricus cuius basis AB & altitudo circumferentia radii CE seu prædictum solidum rotundum est ad cylindricum cuius basis AB & altitudo EC, vt circumferentia radii EC ad EC; & proinde truncus ille inferior resectus æqualis est cylindrico cuius basis AB & altitudo EC, quod demonstrare oportuit.

35 huius.

23 huius.

PROP. 38. THEOREMA.

Si cylindricus rectus secetur Plano ad basem seminormali; superficies trunci inferioris æqualis erit rectangulo, cuius basis est perimeter baseos cylindrici & altitudo intercepta recta inter centrum grauitatis Perimetri baseos & communem intersectionem baseos & plani secantis.

EIsdem positis quæ in antecedente, sit C centrum grauitatis perimetri baseos AB. Dico superficiem trunci inferioris æqualem esse rectangulo cuius basis est ambitus figuræ AB & altitudo recta EC. Superficies solidi rotundi geniti ex rotatione figuræ AB circa DF æqualis est rectangulo

cuius

cuius basis est ambitus figuræ AB & altitudo circumferen- 38 huius,
tia radii EC; atque eadem superficies solidi rotundi est ad
superficiem trunci inferioris cylindrici recti super AB rese- 24
cti a plano basem AB seminormaliter secante in recta DF, huius,
vt circumferentia radii CE ad CE; sed rectangulum cuius
basis est ambitus figuræ AB & altitudo circumferentia radii
EC seu superficies solidi rotundi geniti ex rotatione figuræ
AB circa DF est ad rectangulum cuius basis est ambitus fi-
guræ AB & altitudo EC, vt circumferentia radii EC ad EC;
& proinde superficies trunci inferioris resecti æqualis est re-
ctangulo cuius basis est ambitus figuræ AB & altitudo EC,
quod demonstrare oportuit.

Eodem modo demonstratur hęc propositio, si superficies cylindrici recti insistat lineę vel lineis perimetrum non claudentibus.

SCHOLIVM.

IN duabus præcedentibus eisdem mediis demonstratur, quomodocunque secetur cylindricus, in prima, truncum inferiorem esse æquale cylindrico eandem cum proposito basem habenti & altitudinem æqualem perpendiculari rectę ad basem ex eius gravitatis centro excitatę vsque ad planum secans, & in secunda, superficiem trunci inferioris esse æqualem rectangulo basem habenti æqualem perimetro baseos cylindrici propositi & altitudinem æqualem perpendiculari rectæ ad basem cylindrici propositi ex centro grauitatis eius perimetri excitatæ vsque ad planum secans.

PROP. 39. THEOREMA.

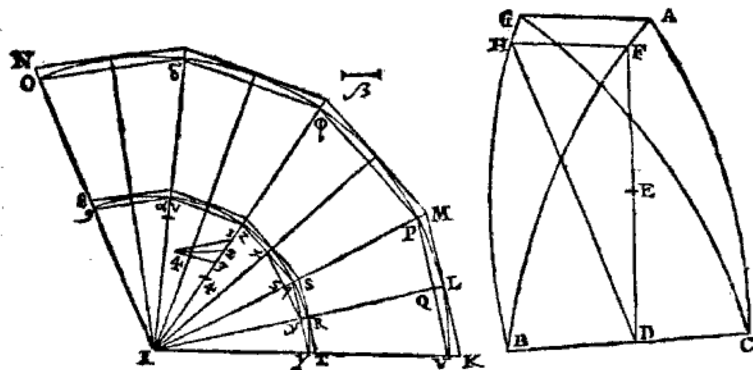
Si cylindricus rectus, habens basem ab vna parte à recta terminatam, secetur plano per illam rectam, & rotetur basis cylindrici circa eandem rectam, vt fiat solidi rotundi portio qualibet; erit portionis centrum grauitatis idem cum centro grauitatis arcus

circularis, in quo circumfertur centrum æquilibrii trunci cylindrici inferioris in cylindrici base notatum.

SIt super figura A B C ex vna parte a recta B C terminata cylindricus rectus, qui sectus a plano transeunte per rectam BC exhibeat truncum suum inferiorem BCAG, cuius centrum æquilibrii in base sit E. Ex rotatione figuræ A B C circa rectam B C fiat portio solidi rotundi: dico portionis centrum grauitatis idem esse cum centro grauitatis arcus circularis in quo circumrotatur punctum E: si non sint eadẽ, inter illa sit distantia recta β; & concipiatur portioni solidi rotundi circumscribi solidum polyedrum constans ex 2 vel 4 vel 16, 32, & vel quotcunque (dummodo numerus sit in progressione dupla a binario) æqualibus truncis inferioribus cylindrici propositi recti secti a plano habente communem intersectionem cum base rectam B C, & eidem portioni solidi rotundi inscribi aliud polyedrum priori simile, ita vt eorum centra grauitatis distent interuallo minore quam recta β; hoc enim possibile est, quoniam talia polyedra quo plura habent latera, eo in infinitum portioni sunt propiora: deinde per centrum æquilibrii E rectæ B C normale ducatur planum faciens cum trunco communem intersectionem triangulum HFD rectangulum ad F, item cum portione solidi rotundi communem intersectionem sectorem circuli IVLO, & cum polyedro circumscripto polygoni regularis ad sectorem circumscripti, item cum polyedro inscripto similem portionem polygoni regularis sectori eidem inscripti. Manifestum est radium I V esse æqualem rectæ D F. Radio I γ æquali rectæ DE sit sector circuli I Y 9 & sectori I Y 9 circumscribatur polygonum T S 8 simile polygono K M N, item eidem inscribatur polygonum γ79 circumscripto simile. Ducatur recta I L quatuor latera similium polygonorum 7γ, S T, PV, MK, bifariam secans in punctis Y, R, Q, L; manifestum est triangulum I L K rectangulum ad L esse communem se-

ctio-

ctionem plani ſecantis cum vno æqualium truncorum e quibus conſtat polyedrum portioni ſolidi rotundi circumſcriptum; quem truncum ſupponamus eſſe eundem cum trunco A B C G (quod ſine abſurdo efficere poſſumus, quoniam omnes trunci inferiores, quorum plana ſecantia baſem ſecant in recta B C, idem habent in baſe centrum æquilibrii E) & proinde patet trunci, communem habentis cum plano ſecante interſectionem L I K, centrum æquilibrii in baſe eſſe punctum R; eodemque modo probatur punctum R eſſe in



baſe centrum æquilibrii trunci, cuius interſectio cum plano ſecante eſt MIL; & ideo horum truncorum ſimul iunctorum centrum grauitatis eſt R punctum: eodem modo probatur in duobus quibuslibet truncis totius polyedri circumſcripti ad vnam ſuperficiem iunctis, vtriuſque ſimul trunci centrum grauitatis eſſe in puncto, vbi recta ex vertice I baſem trianguli (quod triangulum eſt communis ſectio plani ſecantis cum duobus iunctis truncis) bifariam ſecans, arcum circularem 9γ interſecat: facili quoque negotio probatur punctum Y eſſe centrum grauitatis duorum truncorum iunctorum,

quorum cum plano secante communis intersectio PIV triangulum; item & punctum X esse centrum grauitatis duorum iunctorum truncorum, quorum cum plano secante communis intersectio φIP triangulum: iungatur recta XY, quę bifariam secatur in puncto 5; manifestum est punctum 5 esse centrum grauitatis quatuor iunctorum truncorum simul, quorum cum plano secante communis intersectio est trapezium IVP φ; atque punctum 5 centrum etiam est grauitatis rectarum Z 7, 7 γ, simul: eodem modo probatur α esse centrum grauitatis quatuor iunctorum truncorum simul, quorum cū plano secante communis intersectio est trapezium I φ δ O, & etiam rectarum 9ν, νZ, simul. Centra grauitatis α5 iungantur recta, quę bifariam secetur a recta I Z in puncto 3; manifestum est 3 centrum grauitatis polyedri inscripti esse etiam centrum grauitatis rectarum omnium simul arcui 9γ inscriptarum: eodem modo probatur centrum grauitatis polyedri circumscripti nempe 1 idem esse cum centro grauitatis omnium rectarum simul arcui 9γ circumscriptarum. Sit centrum grauitatis portionis solidi rotundi 4, & centrum grauitatis arcus 9γ, 2, quod necessario est in recta IZ inter puncta 1, 3; iungantur rectę 14, 24, 34. Ex constructione 13 minor est quam 24: angulorum 124, 423, sit maior vel saltem non minor 124, & ideo latus 14 maius erit latere 24, sed 24 maior est quam 13; & proinde 14 maior est quam 13; hoc est, centrum grauitatis portionis solidi rotundi distat a cētro grauitatis polyedri sibi circumscripti maiore interuallo quam centrum grauitatis eiusdem polyedri circumscripti distat a centro grauitatis similis polyedri inscripti; quod est absurdum, maiore enim interuallo distant centra grauitatis polyedrorum inscripti & circumscripti quam distant centra grauitatis portionis solidi rotundi & polyedri circumscripti; & proinde nullo interuallo distant centra grauitatis portionis solidi rotūdi & arcus circularis 9γ, & ideo idem est eorum centrum grauitatis, quod demonstrare oportuit.

No-

Notandum in sequentibus nos semper intelligere superficiem portionis solidi rotundi absque planis quibus terminatur.

PROP. 40. THEOREMA.

Eisdem positis quæ in antecedente, erit superficiei portionis solidi rotundi centrum grauitatis idem cum centro grauitatis arcus circularis, in quo circumfertur centrum æquilibrij superficiei trunci cylindrici inferioris in cylindrici base notatum.

EIsdem positis quę in antecedente, sit superficiei trunci BCAG centrum ęquilibrii in base E. Dico superficiei portionis solidi rotundi centrum grauitatis idem esse cum centro grauitatis arcus circularis in quo circumrotatur pũctum E: si non sint eadem, inter illa sit differentia recta β; & concipiatur portioni solidi rotundi circumscribi solidum polyedrum constans ex 2, 4, 8, 16 vel quotcunque (dummodo numerus sit in progressione dupla a binario) ęqualibus trũcis inferioribus cylindrici propositi recti secti a plano habẽte communem sectionem cum base rectam BC, & eidem portioni solidi rotundi inscribi aliud polyedrum priori simile, ita vt centra grauitatis eorum superficierum distent minore interuallo quam β; hoc enim possibile est, quoniam talia polyedra quo plura habent latera eo in infinitum eorum superficies minus inter se discrepant, ita vt eorum differentia minor possit esse quacunque proposita quantitate. Deinde per centrum ęquilibrii E rectę BC normale ducatur planum faciens cum trunco ABCG communem sectionem triãgulum HFD rectangulum ad F, item cum portione solidi rotundi cõmunem sectionẽ, sectorẽ circuli IVLO & cum polyedro circumscripto portionẽ polygoni regularis ad sectorem circumscripti, item cum polyedro inscripto similem portionem polygoni regularis sectori eidem inscripti. Manifestum est radium IV esse æqualem rectæ DF: radio Iy æquali rectæ

DE

DE sit sector circuli Iγ9, & sect ori Iγ9 circumscribatur polygonum TS8I simile polygono IKMN, item eidem inscribatur polygonum Iγ79 circumscripto simile. Ducatur recta IL latera quatuor parallela similium polygonorum 7γ, ST, PV, MK, bifariam dividens in punctis Y, R, Q, L; manifestum est triangulum I L K rectangulum ad L esse commune sectionem plani secantis cum vno æqualium truncorum ex quibus constat polyedrum portioni solidi rotundi circumscriptum, quem truncum supponamus esse eandem cũ trunco ABCG (quod sine absurdo efficere possumus, quoniam omnes trũcorum inferiorum superficies, quorum plana secantia basem secant in recta B C, idem habent in base centrum æquilibrii E) & proinde patet superficiei trunci, communem habentis cum plano secante intersectionem L I K, centrum æquilibrij in base esse punctum R; eodemque modo probatur punctum R esse in base centrum æquilibrii superficiei trunci, cuius intersectio cum plano secante est MIL, & ideo horum truncorum simul iunctorum superficiei centrum gravitatis est R: eodem modo probatur in duobus quibuslibet truncis totius polyedri circumscripti ad vnam superficiem iunctis vtriusque simul superficiei centrum grauitatis esse in puncto, vbi recta ex vertice I basem trianguli (quod triangulum est cõmunis sectio plani secantis cum duobus iunctis truncis) bifariam secans, arcum circularem 9γ intersecat: facili quoque negotio probatur punctum Y esse centrum grauitatis superficiei duorum iunctorum truncorum, quorum cum plano secante communis intersectio I P V; item & punctum X esse centrum grauitatis superficiei duorum iunctorum truncorum, quorum cum plano secante communis intersectio φ I P triangulum: iungatur recta X Y, quæ bifariam secatur in puncto 5; manifestum est punctum 5 esse centrum grauitatis superficiei quatuor iunctorum truncorum simul, quorum cũ plano secante communis intersectio est trapezium IVPφ; atque punctum 5 centrum etiam est grauitatis rectarum Z7,

7γ, simul: eodem modo probatur α centrum gravitatis rectarum 9γ, γZ, esse centrum grauitatis superficiei quatuor iunctorum truncorum simul, quorum cum plano secante communis intersectio est trapezium $I \varphi \delta O$. Centra grauitatis α, 5, iungantur recta α 5, quæ bifariam secetur in 3. manifestum est 3 centrum grauitatis superficiei polyedri inscripti esse etiam centrum grauitatis rectarum omnium simul arcui 9γ inscriptorum. eodem modo probatur centrum grauitatis superficiei polyedri circumscripti nempe 1 idem esse cum centro grauitatis omnium rectarum arcui 9γ circumscriptorum. Sit centrum gravitatis superficiei portionis solidi rotundi 4 & centrum grauitatis arcus 9γ, 2, quod necessario est in recta IZ inter puncta 1, 3; iungantur rectæ 14, 24, 34: & constructione 13 minor est quam 24: angulorum 124, 423, sit maior vel saltem non minor 124, & ideo latus 14 maius est latere 24, sed 24 maior est quam 13, & proinde 14 maior est quam 13, hoc est, centrum grauitatis superficiei portionis solidi rotundi distat a centro grauitatis superficiei polyedri sibi circumscripti maiore interuallo quam centrum grauitatis superficiei eiusdem polyedri circumscripti distat à cētro grauitatis superficiei similis polyedri inscripti, quod est absurdum, maiore enim interuallo distant centra grauitatis superficierum polyedrorum inscripti & circumscripti, quam distat centrum grauitatis superficiei portionis solidi rotundi a centro gravitatis superficiei polyedri siue inscripti siue circumscripti; & proinde nullo interuallo distant centra grauitatis superficiei portionis solidi rotundi & arcus 9γ, & ideo idem est eorum centrum grauitatis, quod demonstrandum erat.

Eodem modo demonstratur hæc propositio de superficie quacunque rotunda facta a rotatione vnius lineę vel plurium linearum circa axem; modo radius rotationis illas non secet in pluribus punctis.

PROP. 41. THEOREMA.

Si cylindricus rectus secetur plano quocunque & rotetur basis cylindrici circa communem intersectionem baseos & plani secantis, vt fiat solidi rotundi portio qualibet; erit portionis centrum grauitatis idem cum centro grauitatis arcus circularis, in quo circumfertur centrum æquilibrij trunci cylindrici inferioris in cylindrici base notatum.

COncipiatur cylindricus rectus super base quacunque KECD sectus à plano habente cum base communem intersectionem AB rectam: sit que trunci inferioris centrum æquilibrii in base notatum punctum F. ex rotatione figure KECD circa rectam AB fiat portio solidi rotundi; cuius centrũ grauitatis dico idem esse cum centro grauitatis arcus circularis in quo circumfertur punctum F. iungantur ad libitum

lineæ CA, KB, supponaturque cylindricus rectus super base ACDKB secari etiam à prædicto plano secante per rectam AB, & eius trunci inferioris centrum æquilibrii in base esse punctum H, item trunci super figura ACEKB centrum æquilibrii

librli in hasc esse punctum G. ex rotatione figuræ ACDKB circa rectam AB (ita ut eius pars extrema, nempe figura CDKE, describat prædicti solidi rotundi portionem) fiat solidi rotundi portio, cuius centrum grauitatis M; manifestum est solidi rotundi portionem genitam a rotatione figuræ ACDKB esse æqualẽ portionibus, solidi rotundi genitæ à rotatione figuræ CDKE (cuius centrum gravitatis L) & solidi rotundi genitæ à rotatione figuræ ACEKB (cuius centrum grauitatis N) item truncum super figura ACDKB æqualẽ esse truncis super figuris CDKE, ACEKB; & proinde patet pũcta F, H, G, esse in vna recta, item FH esse ad HG ut truncus super ACEKB ad truncum super CDKE, item puncta L, M, N, esse in vna recta, & LM esse ad MN vt portio solidi rotundi geniti a figura ACEKB ad portionem solidi rotundi geniti a figura CDKE; sed portiones solidorum rotundorum inter se sunt in directa ratione truncorũ, vt facile colligitur ex huius 23; & ideo vt FH ad HG ita LM ad MN. per puncta F, L, fit recta FLO, & per puncta H, M, recta HMP, item per puncta G, N, fit recta GNQ; satis patet rectas HMP, GNQ (cum sint radii circulorum, in quorum circumferentiis rotantur puncta H, G,) & ideo rectam etiam FLO esse inter se parallelas & rectæ AB normales, & ideo vt PM ad PH vel QN ad QG ita OL ad OF; sed M, N, sunt centra grauitatis arcuum circularium similium in quibus rotantur puncta H, G, circa centra P, Q; & ideo L est etiam centrum grauitatis similis arcus circularis in quo rotatur punctum F circa centrum O, atque L est etiam centrum grauitatis portionis solidi rotundi geniti ex rotatione figuræ CDKE circa rectam AB, quod demonstrare oportuit.

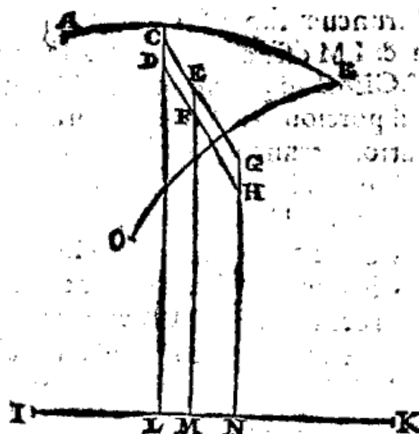
PROP. 42. THEOREMA.

Si linea vel lineæ quotcunque rotentur circa rectam, vt ex ijs generetur portio superficiei rotundæ, etiamsi radius rotationis illas in quotcunque punctis secuerit; erit portionis superficiei rotundæ

L ceu-

centrum grauitatis idem cum centro grauitatis arcus circularis in quo circumfertur centrum æquilibrij in base notatum superficiei trunci cylindrici recti secti à plano habente communem sectionem cum base axem rotationis.

Sit linea, vel lineæ quotcunque A B O, quæ supponantur rotari circa axem I K, secenturque in duobus punctis à radio rotationis. Super lineis A B O imaginetur superficies cylindrica ad basem recta, quæ secetur à plano basem etiam



secante in recta I K; sitque superficiei trunci inferioris centrum æquilibrii in base E. ex rotatione linearum A B O fiat portio superficiei rotundæ; cuius centrum grauitatis F dico esse idem cum centro grauitatis arcus circularis in quo rotatur punctum E. sit B punctum in quo radius rotationis lineas ABO tangit, sitque portionis superficiei trunci super linea vel lineis A B centrum æquilibrii in base C, & portionis superficiei rotundæ ex AB genitæ D; sitque superficiei trun-

ci super OB centrum æquilibrii in basi G, & portionis superficiei rotundæ ex ea genitæ centrum grauitatis, H, manifestum est puncta C, E, G, esse in eadem recta, item & CE esse ad EG ut superficies trunci super OB ad superficiem trunci super AB: eodem modo patet puncta D, F, H, esse in eadem recta, item DF esse ad FH vt portio superficiei rotundæ genitæ ex OB ad portionem superficiei rotundæ genitæ ex AB; sed portiones superficierum rotundarum inter se sunt in directa proportione superficierum truncorum ut colligitur ex huius 24; & ideo vt CE ad EG ita DF ad FH, producantur rectæ CD, EF, GH, donec rectam IK secent in punctis L, M, N; cum puncta D, H, sint centra grauitatis arcuum circularium in quibus rotantur puncta C, G, manifestum est rectas CDL, GHN, esse axi rotationis IK normales & inter se parallelas; & ideo recta EFM eidem IK est, est normalis, cum sit vt CE ad EG ita DF ad FH; & proinde ut LD ad LC vel NH ad NG ita MF ad ME, sed D, H, sunt centra grauitatis arcuum circularium similium in quibus rotantur puncta C, G; & igitur punctum F est etiam centrum grauitatis similis arcus circularis in quo rotatur punctum E, quod demonstrandum erat. 40 huius

Eodem modo demonstratur hoc theorema quando radius rotationis lineas secat in tribus punctis supponendo hanc propositionem, sicut hæc supponit huius 40 & sic deinceps (quando secatur linea in pluribus punctis) anteriores demonstrationes semper supponendo.

PROP. 43. THEOREMA.

EIsdem positis quæ in huius 6; dico solidum rotundum genitum ex rotatione figuræ ABSO circa rectam AB esse ad cylindrum genitum ex rotatione rectanguli ABRO circa eandem AB, vt superficies genita ex rotatione curvæ AQ circa eandem AB ad circulum ex radio AO. figura ABSO est proportionaliter analoga curvæ AQ, & ideo centra gra- 2 huius

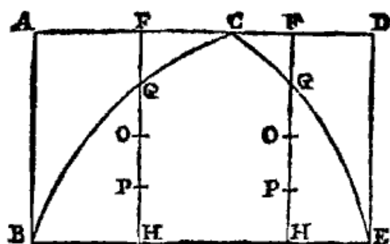
vitatis figuræ ABSO & curvæ A Q eodem interuallo distant à recta AB, quod interuallum sit K. Centra quoque grauitatis rectæ A O & rectanguli ABRO eodem interuallo distant à
2 huius. recta A B nempe $\frac{BR}{2}$, atque figura ABSO est ad rectangulum A B R O vt curua AQ ad rectam AO, & ideo primam & tertiam ducenda in circumferentiam cuius radius K, & secundam & quartam in circumferentiam cuius radius $\frac{BR}{2}$; erit cylindricus cuius basis ABSO & altitudo circumferentia ex radio K nempe solidum rotundum genitum ex rotatione figuræ ABSO circa A B, ad cylindricum cuius basis A B R O &
35 huius. altitudo circumferentia radii $\frac{BR}{2}$ nempe cylindrum genitum
36 huius. ex rotatione ABRO circa AB, sicut rectangulum cuius basis AQ & altitudo circumferentia radii K nempe superficies genita ex rotatione A Q circa A B, ad rectangulum cuius basis AO & altitudo circumferentia radii $\frac{BR}{2}$ nempe circulũ ex radio AO, quod demonstrare oportuit.

PROP. 44. THEOREMA.

SIt figura quæcunque BCE cum rectangulo circumscripto ABED, quæ si librentur ex recta B E; dico momentum rectanguli ABED ad momentum figuræ BCE esse ut cylindrus factus ex revolutione rectanguli A B E D circa B E ad solidum rotundum factum ex revolutione B C E circa eandem B E. Sit rectæ A B parallela & æqualis quæcunque FH figuram BCE secans in G: bisecentur rectæ F H, G H, in punctis O, P; manifestum est momentum rectæ FH esse ad momentum rectæ G H in ratione composita ex ratione F H ad G H & ex ratione O H ad P H, hoc est in duplicata ratione FH ad GH seu ut circulus ex radio F H ad circulum ex radio GH, cumque hoc semper ita eveniat, & primæ & tertiæ semper

per

per ſint eædem; erit, vt momenta omnium FH nempe momentum totius rectanguli ABED ad momenta omnium GH nempe momentum figuræ B C E, ita circuli omnes ex radiis



FH nempe cylindrus ex rotatione rectanguli A B E D circa B E ad circulos omnes ex radiis GH nempe ſolidum rotundum ortum ex rotatione figuræ BCE circa eandem BE, quod demonſtrare oportuit.

PROP. 45. THEOREMA.

Eiſdem poſitis quæ in antecedente; ſi ſolida rotunda orta ex rotatione rectanguli ABED & figuræ B C E circa BE ſecentur per rectam B E plano quod horizonti ſit perpendiculare, & ſemiſolida ex recta BE librentur: dico momentum ſemiſolidi A D E B eſſe ad momentum ſemiſolidi BCE vt omnes cubi ab FH ad omnes cubos a G H: ſint ſemicirculorum FH, GH, centra grauitatis O, P; manifeſtum eſt momentum ſemicirculi FH ad momentum ſemicirculi GH eſſe in ratione compoſita ex ratione ſemicirculi FH ad ſemicirculum G H nempe ex duplicata ratione FH ad G H & ex ratione OH ad P H ſeu FH ad G H; & ideo momentum ſemicirculi FH eſt ad momentum ſemicirculi GH in triplicata ratione F H ad G H, ſeu vt cubus ab FH ad cubum a GH, cumque

que hoc ſemper ita eueniat, & primæ & tertiæ ſemper ſint eædem; erit, vt momenta omnium ſemicirculorum FH nempe momentum ipſius ſemiſolidi B A D E ad momenta omnium ſemicirculorum G H nempe momentum ipſius ſemiſolidi BCE vt omnes cubi ab F H ad omnes cubos a G H, quod demonſtrare oportuit.

Hoc Theorema ab acutiſſimo Geometra R. P. Stephano de Angelis nuper inventum poterit eodem modo demonſtrari de qualibet ſolidi rotundi parte reſecta a duobus planis in ſolidi rotundi axe ſe invicem ſecantibus.

Hæc dicta ſint de quantitatum curuarum transmutatione & menſura in genere; nunc accedamus ad applicationem in caſibus particularibus, quæ cetræ facilis eſt, poteſt enim nullo negotio ab Analyſta perfici; ſed nos varietati ſtudentes, aliquando purè geometrice, aliquando purè analyticè, aliquando partim geometricè partim analyticè propoſitum demonſtrabimus; hinc enim facilè percipiet ſagax Lector quid in omni caſu exhibito agendum ſit.

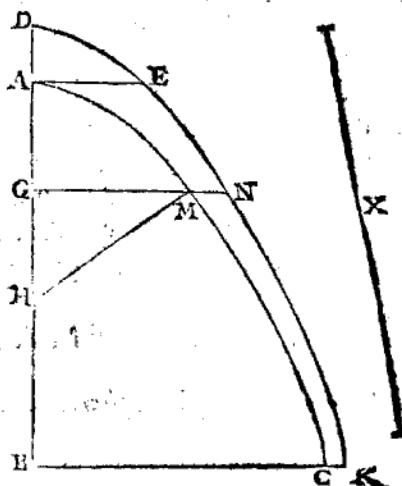
PROP. 46. PROBLEMA.

Inuenire circulum æqualem ſuperficiei conoidis Parabolicæ.

SIt conois parabolica genita ex reuolutione ſemiparabolæ ABC circa axem A B; cuius ſuperficiei oportet inuenire æqualem circulum. Producatur BA in D vt AD ſit quarta pars lateris recti, tangatque parabolam in vertice A recta AE æqualis dimidio lateris recti; & axe D B per E ducatur parabola DEK ordinatim applicatæ BC productę occurrent in K: ſitque X recta diameter quadrati æqualis ſegmento parabolico A E K B. dico rectam X eſſe radium circuli æqualis ſuperficiei conoidis parabolicę genitæ ex rotatione ſemiparabolæ ACB circa axem AB. ex quolibet puncto curvæ parabolicæ AC nempe M demittatur in axem ordinatim

ap-

applicata M G, quæ producatur donec exteriorem curvam parabolicam DEK interſecet in N; ſitque G H recta æqualis dimidio lateris recti, patet ex multorum demonſtrationibus rectam MH tangentem in puncto M normaliter ſecare. Deinde ex doctrina parabolarum aſymptotarum a Gregorio a S. Vincẽtio & aliis tradita, manifeſtum eſt parabolas ABC,



DBK, eſſe aſymptotas; & ideo (ex eadem doctrina) quadratum rectæ GN eſt æquale quadratis rectarum GM, AE, hoc eſt, quadratis rectarum GM, GH; illis autem quadratis æquale eſt quadratum rectæ MH; rectæ igitur HM, GN, ſunt æquales: cumque hoc ſemper fiat in omnibus punctis curuæ parabolicæ AMC; manifeſtum eſt ex huius 3 ſegmentum parabolicum AEKB eſſe æquale ſuperficiei trunci, ſuper curua AMC ſectæ a plano per rectam AB tranſeunte, & in angulo ſemirecto cum parabola ſeu baſe trunci inclinãte; & igitur cum quadratum rectæ X ſit duplum ſuperficiei 25 huius.

trun-

trunci, erit X radius circuli æqualis superficiei conoidis a rotatione curuæ parabolicæ AMC circa axem AB genitæ, quod demonstrandum erat.

Hinc etiam manifestum est centrum grauitatis superficiei conoidis parabolicæ idem esse cum centro æquilibrii segmenti parabolici AENKB in axe AB: est enim segmentum AEKB magnitudine & grauitate analogum cum superficiei trunci ex huius 3, & superficies trunci est magnitudine & grauitate analoga cum superficie conoidis ex huius 24: Sed ex hac ipsa propositione sequitur illa analogia in magnitudine & grauitate, quoniam eadem quæ demonstrantur de integris eodem modo demonstrantur de partibus earum proportionalibus v. g. eodem modo demonstratur sectionem superficiei conoidis parabolicæ genitæ ex reuolutione curvæ MC esse æqualem circulo cuius radii quadratum duplum est segmenti GNKB, quo demonstrata est præsens propositio.

PROP. 47. PROBLEMA.

Inuenire circulum æqualem superficiei sphæroidis oblongæ.

Sit sphærois oblonga genita ex revolutione semiellipseos EFT circa axem longiorem ET; cuius superficiei oportet inuenire circulum æqualem. In verticibus T, E, ellipsem tangant rectæ TR, ED, æquales semissi lateris recti: deinde centro G, vertice F per puncta D, R, ducatur ellipsis DFR; & segmento elliptico DFRTE fiat æquale quadratum, cuius diameter sit X. dico X esse radium circuli æqualis superficiei sphæroidis oblongæ propositæ. producatur ellipsis DFR, donec axem ET productum intersecet in punctis Z, B; facile patet rectas GZ, FG, esse semiaxes coniugatos semiellipseos BFZ. semiellipses tangentes in verticibus B, E, T, Z, ducantur rectæ BA, EC, TQZY, omnes æquales rectæ FG, & iungatur recta ACFQY; ducantur

quo-

quoque GQ, GR, & GY, quæ QT secet in S. ex quolibet semiellipseos datæ puncto N in axem ET sit perpendicularis NP, quæ producatur vt rectam AY secet in I & rectas GY, GR, GQ, in punctis O, M, L, & ellipsem BFZ in K. sit recta PH æqualis rectæ PM, & iungatur HN; manifestum est (ex fran: a schotten commentariis in Cartesium pag: 214) HN

normaliter secare tangentem ellipseos in puncto N. ob ellipsem FRZ & rectangulum ex semiaxibus FGZY, cuius diameter GY, quadratum rectæ QT est æquale quadratis rectarum RT, TS; cumque rectæ LP, MP, OP, sint in eadem ratione cum rectis QT, RT, ST; erit quadratum rectæ LP ęquale quadratis rectarum MP, OP; sed quadratum rectę IP ęqualis est quadratis rectarum LP, NP, ob antenominatam proprietatem ellipseos; & ideo quadratum rectę IP ęquale est quadratis rectarum MP, NP, OP; sed quadratum rectę IP ęquale est etiam quadratis rectarum OP, KP; & proinde quadrata rectarum MP, NP, OP, sunt ęqualia quadratis rectarum KP, OP; & ęqualia auferendo, quadratum rectę KP ęquale est quadratis rectarum MP, NP, seu HP, NP, sed quadratū rectę HN æquale est eisdem quadratis; & ideo rectæ HN, KP, sunt ęquales; cumque hoc semper fiat in omnibus punctis curuę ellipticę EFT, manifestum est ex huius 3 segmentum ellipticum EDFRT esse ęquale superficiei trunci super curua EFT sectæ a plano per rectam ET transeunte, & in angulo semirecto cum base trunci inclinante; & igitur cum

M qua-

quadratum rectæ X sit duplum superficiei trunci erit X radius circuli æqualis superficiei sphæroidis genitæ a rotatione curuę EFT circa axem ET, quod demonstrare oportuit.

Hinc etiam patet quod superficies sphæroidis sit magnitudine & gravitate analoga cum segmento elliptico EDFRT, idem enim quod demonstratur de integris, non dissimili methodo demonstratur de partibus earum proportionalibus v. g. eodem modo demonstratur superficies genita ex rotatione curuæ FN æqualis circulo cuius radii quadratum duplum est segmenti elliptici FKPG, quo demonstrata est præsens propositio; quod etiam in tribus sequentibus est intelligendum, cum eadem sit ratio huius & illarum, me enim tædet eadem semper repetere.

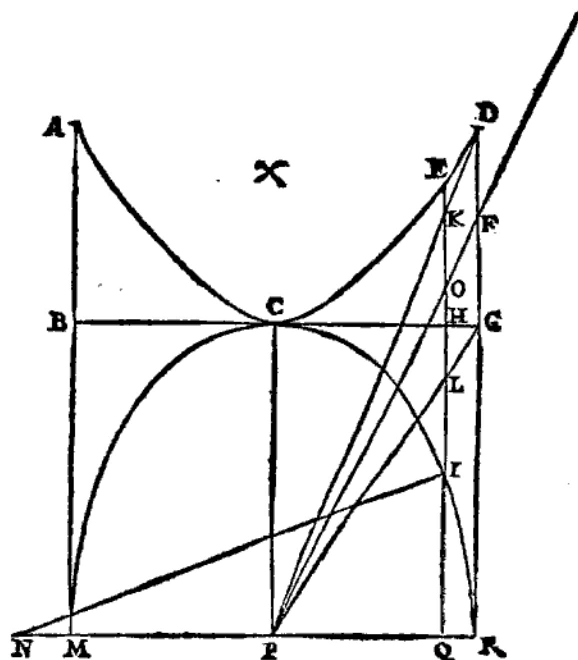
PROP. 48. PROBLEMA.

Inuenire circulum æqualem superficiei sphæroidis latæ.

Sit sphærois lata genita ex rotatione semiellipseos MCR circa axem breuiorem MR, cuius superficiei oportet inuenire æqualem circulum. In verticibus M, R, ellipsem tangant rectæ MA, RD, æquales semissi lateris recti. Deinde centro P, vertice C, per puncta A, D, ducatur hyperbolá ACD, & segmento hyperbolico ACDRM fiat æquale quadratum cuius diameter recta X. dico X esse radium circuli æqualis superficiei sphæroidis latæ propositę. Sit hyperbolæ asymptota PF rectam DR secans in F, sitque hyperbolam tangens in vertice recta BCG, & iungantur rectæ PD, PG. ex quolibet ellipseos puncto I in axem MR sit perpendicularis IQ, rectas CG, PD, PF, PG, intersecans in punctis H, K, O, L, item hyperbolam intersecans in E. Sit recta QN æqualis rectæ QK; manifestum est (ex commentarius Francisc. a Scotten in Cartesium pag. 214) rectam NI ellipsem tangentem in puncto I normaliter secare. quoniam PF est hyperbo-

læ

læ asymptota & CG recta hyperbolam tangens in vertice & GR æqualis axis semissi CP; erit quadratum rectę DR ęquale quadratis rectarum RF, RG; cumque rectę KQ, OQ, LQ, sint proportionales rectis DR, FR, GR; erit quadratum rectę KQ æquale quadratis rectarum OQ, LQ, sed quadratum



rēctæ EQ est æquale quadratis rectarum HQ, OQ, & quadratum rectæ HQ æquale est quadratis rectarum IQ, LQ; & ideo quadratum rectæ EQ æquale est quadratis rectarum IQ, LQ, OQ, hoc est, quadratis rectarum IQ, KQ, seu IQ, QN, sed quadratum rectæ IN æquale est eisdem quadratis; sunt

M 2 ergo

ergo æquales rectæ EQ, I N; cumque hoc semper fiat in omnibus punctis curuæ ellipticæ MCR, manifestum est ex huius 3 segmentum hyperbolicum A C D R M esse æquale superficiei trunci super curua elliptica M CR sectæ a plano per rectā MR transeunte, & in angulo semirecto cum base trunci inclinante; & igitur cum quadratum rectæ X sit duplum superficiei trunci, erit X radius circuli æqualis superficiei sphæroidis latæ genitæ ex rotatione curuæ ellipticæ MCR circa axē MR, quod demonstrandum erat.

25 huius.

PROP. 49. PROBLEMA.

Inuenire circulum æqualem superficiei conoidis hyperbolicæ.

SIt conois hyperbolica genita ex reuolutione semihyperbolæ FST circa axem FS, cuius superficiei oportet inuenire æqualem circulum. In vertice F hyperbolam tangat recta FH æqualis semissi lateris recti. Deinde describatur hyperbola transiens punctum H, idem habens centrum nempe D & eundem semiaxem coniugatum nempe DE cum hyperbola proposita F S T; sitque hyperbola descripta B HR ordinatim applicatam ST productam secans in R; & segmento hyperbolico FHRS fiat æquale quadratum, cuius diameter X: dico X esse radium circuli æqualis superficiei conoidis hyperbolicæ propositæ. Sit hyperbolæ propositæ asymptota DV, rectam FH productam secans in K, sitque hyperbolæ inuentæ asymptota DY, FH etiam productam secans in C, & producatur recta D H. Ex quolibet hyperbolæ propositæ puncto Q axi applicetur ordinatim recta QG, quæ producta rectas DH, DV, D Y, intersecet in punctis Z, O, L, & hyperbolam inuentam in puncto P; sitque G A æqualis rectæ G Z, manifestum est (ex Fran. a Schotten commentariis in Cartesium pag. 216.) iunctam rectam QA tangentem hyperbolam in puncto Q normaliter secare. Quoniam recta FK hyper-

bolam

bolam tangens in vertice producitur ad eius asymptotam in puncto K, erit FK æqualis eius semiaxi coniugato D E; & ob hyperbolam B H R & eius asymptotam D Y, quadratum rectæ F C æquale est quadratis rectarum F H, D E, hoc est FH, FK; cumque rectæ G Z, G O, G L, sint in eadem ratione

cum rectis FH, FK, FC; erit quadratum rectæ GP æquale quadratis rectarum G O, G Z; sed ob hyperbolam F Q T & eius asymptotam D V, quadratum rectæ G O, æquale est quadratis rectarum G Q, D E; & ideo quadratum rectæ G L æquale quadratis rectarum GZ, G Q, D E; sed quadratum rectæ GL æquale est etiam quadratis rectarum G P, D E; & ideo æqualia

lia auferendo, quadratum rectę GP æquale est quadratis rectarum G Z, G Q, hoc est, quadratis rectarum G A, G Q; his autem quadratis ęquale est quadratum rectę A Q, æquales ergo sunt rectę GP, A Q; cumque hoc semper eveniat in omnibus punctis curvę hyperbolicę FQT, manifestum est ex huius 3 segmentum hyperbblicum FHRS ęquale esse superficiei trunci super curua hyperbolica FQT sectæ a plano per rectam FS transeunte, & in angulo semirecto cum base trunci inclinante; & igitur cum quadratum rectæ X sit duplum superficiei trunci, erit X radius circuli ęqualis superficiei conoidis hyperbolicæ genitæ ex rotatione curuæ hyperbolicæ FQT circa axem FS, quod demonstrandum erat.

PROP. 50. PROBLEMA.

Si curva hyperbolica rotetur circa axem coniugatum; inuenire circulum æquale superficiei ab illa curva hyperbolica rotata genita.

SIt curva hyperbolica α C, quę rotata circa axem suum coniugatum FZ gignit superficiem; oportet huic superficiei æqualem circulum inuenire. Sit curuæ hyperbolicę α C centrum Z, vertex α, asymptoton ZD: hyperbolam tangat in vertice α recta αK ęqualis semissi lateris recti eiusdem hyperbolæ: sit recta HK rectæ Zα parallella & æqualis, quæ producatur indefinite hyperbolam secans in R & eius asymptoton Z D in M; & in illa sumatur recta H V, cuius quadratum æquale sit quadratis rectarum HR, HK: deinde centro Z vertice α fit hyperbola αVA, quæ producatur donec rectam FCA parallelam rectæ Zα intersecet in A; & segmento hyperbolico F A V α Z fiat æquale quadratum, cuius diameter X: dico X esse radium circuli quæsiti. Sit hyperbolæ inuentæ asymptoton Z B rectam H V secans in L, & ex quolibet hyperbolæ propositæ puncto T in vtrumque axem (si opus est)

pro-

productum demittantur perpendiculares TI, Tβ; ſitque curuam hyperbolicam normaliter ſecans in puncto T, recta Gγ vtrumque axem (ſi opus eſt) productum ſecans in punctis G, γ: producantur (ſi opus eſt) rectæ Tβ, TI, & rectam ZKY interſecent in Y & O punctis; manifeſtum eſt ex loco citato

Franciſ. a Schooten rectas βY, $\beta\gamma$, eſſe æquales; eſt autem, vt $\beta\gamma$ ad βT ſeu EO, ita IT ſeu βZ ad IG; & ideo ut Yβ ad OE ita Zβ ad IG; ſed ut Yβ ad OE ita Zβ ad ZE ſeu IO; ſunt ergo æquales rectæ GI, IO. Producatur recta IT vt hyperbolæ inventæ occurrat in Q & eius aſymptoto in P, ſitque eius interſectio cum aſymptoto hyperbolæ propoſitæ punctum N. ex conſtructione quadratum rectæ HV (hoc eſt quadrata rectarum HL, Zα) æquale eſt quadratis rectarum HR, HK, ſeu quadratis rectarum HM, HK, Zα; & ideo idem vtrinque auferendo, relinquitur quadratum rectæ HL æquale quadratis rectarum HK, HM: cumque rectæ IP, IN, IO, ſint in eadem

ra-

ratione cum rectis HL, HM, HK; erit etiam quadratum rectæ IP æquale quadratis rectarum IN, IO; & idem quadratum Z α vtrinque addendo, erunt quadrata rectarum I P, Z α (hoc est quadratum rectæ I Q) æqualia quadratis rectarum I O, I N, Zα, hoc est quadratis rectarum IO, IT seu IG, IT, hoc est quadrato rectæ TG; sunt ergo æquales rectæ QI, TG; cumque hoc semper eueniat in omnibus punctis curuæ hyperbolicæ α T C, manifestum est ex huius 3 segmentum hyperbolicum FAαZ æquale esse superficiei trunci super curua hyperbolica αTC sectæ a plano per rectam FZ transeunte & in angulo semirecto cum base trunci inclinante; & igitur, cum quadratum rectæ X sit duplum superficiei trunci, erit X radius circuli æqualis superficiei genitę a rotatione curuę hyperbolicę α T C circa axem coniugatum Z F, quod demonstrandum erat.

25 huius.

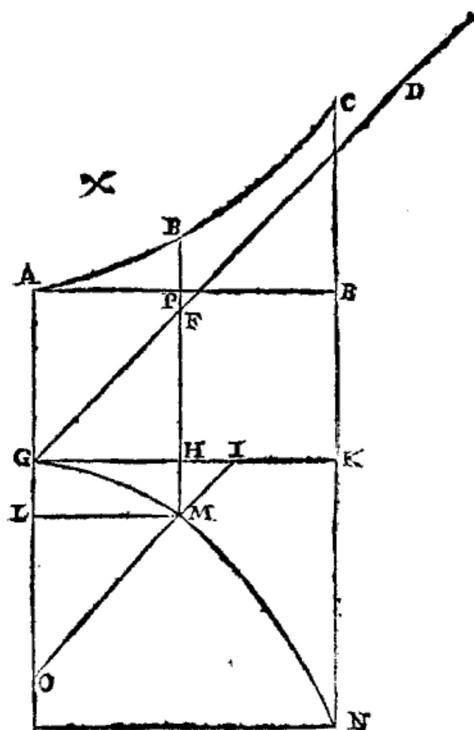
PROP. 51. PROBLEMA.

Inuenire rectam æqualem curuæ Parabolicæ.

SIt curua parabolica G N, verticem habens G & axem G O, cui oportet rectam inuenire ęqualem. Producatur axis GO in A, vt GA fiat ęqualis semissi lateris recti, sitque GK recta parabolam tangens in vertice & NK axi parallella illi occurrens in K: deinde sit recta G D angulum rectum A G K bifariam diuidens, fiatque hyperbola A C verticem habens A, centrum G & asymptoton G D; producatur recta N K donec hyperbolam secet in puncto C, sitque A E rectę G K parallella: fiat tandem vt rectangulum AEKG ad segmentum hyperbolicum AGKC, ita recta G K ad rectam X; dico rectam X ęqualem esse curuę parabolicę G N. Ex quolibet curuę parabolicę puncto M demittantur in rectas G O, G K, perpendiculares ML, MH, sitque recta O I curuam parabolicam normaliter secans in puncto M, & rectis G O, G K, oc-

curren s

currens in punctis O, I. Manifestum est rectam L O ęqualem esse semissi lateris recti seu GA: producatur recta MH vt hyperbolam secet in puncto B & asymptoton G D in F; manifestum etiam est ob asymptoton G D quadratum rectę H B



ęquale esse quadratis rectarum A G, H F, vel ob angulos æquales HGF, HFG, quadratis rectarum LO, GH, seu LO, LM; sed quadratum rectæ O M æquale est quadratis rectarũ OL, LM; & ideo rectæ OM, HB sunt æquales. Deinde ob si-

N mili-

militudinem triangulorum HMI, LOM, est vt HM ad MI ita OL ad OM, seu GA ad HB; cumque hoc semper fiat in omnibus punctis curuæ parabolicæ GN; erit ex huius 2 rectangulum AEKG ad segmentum hyperbolicum ACKG, vt recta GK ad curuam parabolicam GN; erat autem vt rectangulũ AEKG ad segmentum hyperbolicum ACKG, ita recta GK ad rectam X; & proinde recta X æqualis est curuę GN, quod demonstrare oportuit.

Eodem modo demonstratur rectangulum PEKH esse ad segmentum hyperbolicum BHKC vt recta HK ad curuam MN; & proinde segmentum hyperbolicum ACKG est magnitudine & grauitate analogum cum curua GN, quod etiam ex huius 2 est perspicuum; cumque detur facilè truncus inferior cylindrici recti super ACKG ex huius 21, 35 & 37 dabitur centrum grauitatis segmenti hyperbolici ACKG; & ideo innotescit centrum æquilibrii curuæ GN in recta GK: hinc quoque notatu digna est analogia in magnitudine & grauitate, quæ contingit inter curuam parabolicam, superficiem sphæroidis latæ & superficiem genitam a rotatione curuæ hyperbolicæ circa axem suum coniugatum, quæ euidens est ex sola figurarum huius 48, 50, 51 inspectione.

PROP. 52. PROBLEMA.

Si curua parabolica vertatur circa rectam, eam in vertice tangentem, inuenire circulum æqualem superficiei ex tali conuersione genitæ.

SIt curua parabolica IED, cuius vertex D, rotata circa rectam BD eam in vertice tangentem, vt gignat superficiem rotundam: oportet huic superficiei inuenire circulũ æqualem. Sit curuæ parabolicæ latus rectum quadruplum rectæ DR, & eius axis DK. Ex puncto I in axem DK fit recta perpendicularis IK, & axe transuerso RD (cui etiam æqualis

lis sit axis coniugatus) fiat hyperbola DGL rectam IK productam secans in L: deinde semi hyperbolæ DKL fiat æquale quadratum, cuius diameter X: dico X esse radium circuli quæsiti. Ex quolibet curuæ parabolicæ puncto E in axem demittatur perpendicularis recta EF, quæ producta hyperbolam intersecet in puncto G; sitque parabolam tangens in puncto E recta EA tangenti DB occurrens in C & axi producto in A, sitque CH æqualis & parallela rectę DF. Manifestum est FA duplam esse rectæ DA, & ideo EF est dupla rectæ CD, est ergo EH ęqualis rectæ HF. rectangulum RF in FD est æquale quadrato rectæ DF vna cum rectangulo RDF, atque rectangulum RDF æquale est quadrato EH quoniam RD est quarta pars lateris recti; & ideo quadratum rectæ CE (quod æquale est quadratis rectarum EH, HC = DF) æquale est rectangulo RF in FD, sed quadratum rectæ FG eidem rectangulo est æquale, & proinde rectę EC, FG, inter se sunt æquales, cumque hoc semper fiat, patet ex hu-

jus 4 semihyperbolam DKL esse æqualem superficiei trunci super curua parabolica DEI sectæ a plano per rectam DB transeunte & in angulo semirecto cum base trunci inclinante; & ideo, cum quadratum rectæ X sit duplum superficiei trunci, erit X radius circuli æqualis superficiei genitæ a rotatione curuæ parabolicæ circa rectam DB, quod demonstrandum erat.

25 huius.

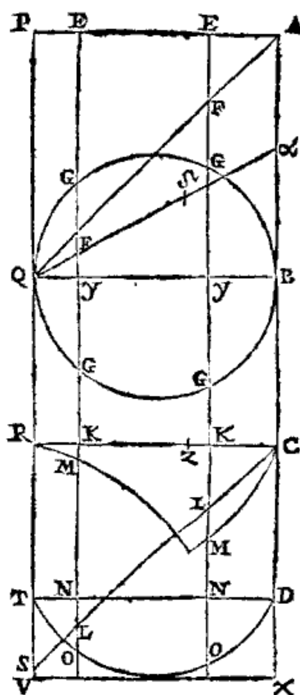
Ex hac propositione patet semihyperbolam DKL esse magnitudine & grauitate analogam cum superficie: ex hac, antecedente & huius 38 non difficile est inuenire centrum grauitatis curuæ parabolicæ vel eius portionis cuiuscunque datæ, quod admonuisse sufficiat.

PROP. 53. PROBLEMA.

Inuenire centrum grauitatis semicylindri recti obliquè secti.

Sit circulus BGQG cylindri basis, cuius diameter BQ, sitque recta BA circulum tangens in A semicylindri altitudo æqualis rectæ BQ, perinde enim est cum omnes semicylindri super eadem base sint analogi, quæ producatur ad partes B indefinitè, sitque ei parallela & indefinitè longa, recta PQ; fiant etiam AP, CR, DT, parallelæ diametro BQ, & ducatur AQ recta reliquis se habentibus vt in figura. Sit figura CRM talis naturæ, vt (ducta recta quacunque EYKM parallela rectæ PQ) EY sit ad FY vt GY ad KM: figura CRM est analoga magnitudine & grauitate semicylindro; atque huius figuræ seu semicylindri centrum æquilibrii ita inuenitur: sint CR, RS, æquales reliquis se habentibus vt in figura, fiatque figura DOT talis naturæ, vt (ducta recta quacunque EYKMNO) EY sit ad KL vt KM ad NO; & figuræ DOT circumscribatur rectangulum DV: sit deinde vt figura CRM ad figuram DOT ita EY seu RC ad CZ, manifestum est ex huius 37 Z esse centrum æquilibrii figuræ CMR: figura autem

tem D O T innotescit hoc modo: datur rectangulum DV, quoniam DT est æqualis BQ & DX seu TV est quarta continue proportionalium, quarum prima est EY & secunda dimidia rectę BQ; deinde NO est semper quarta continue pro-



portionalium, quarum prima est EY & secunda GY, quod sic probo: ex prædictis manifestæ sunt sequentes analogiæ.

EY : FY = QY : : GY : KM

EY : KL = BY : : KM : NO

EY² : BY x YQ = GY² : : KM x GY : KM x NO

& ideo EY² : GY² : : GY : NO, est igitur

GY

$GY^3 =$ $EY^2 \times NO$; & proinde posita EY prima & GY secunda, erit NO quarta continue proportionalium, & ideo figura DOT est ad rectangulum DV, vt conois parabolica (cuius basis est circulus BGQG) ad cylindricum parabolicum illi conoidi circumscriptum, cumque dentur proportio conoidis parabolicæ ad cylindricum sibi circumscriptum & rectangulum DV, dabitur quoque figura DOT, & ideo punctum quoque Z, & ideo datur in semicylindri base eius centrum æquilibrii; & proinde semicylindri centrum grauitatis erit in data perpendiculari ad basem e centro æquilibrii excitata, atque idem gravitatis centrum est in recta $Q\alpha$ ducta inter punctũ Q & α medium punctum rectæ AB ex puncto B
29 huius, basi BGQ perpendicularis, supposita nempe cylindrum esse sectum a plano baseos planum in recta PQ secante; sit igitur vt RC ad CZ ita $Q\alpha$ ad $\alpha\delta$, erit δ semicylindri centrum grauitatis, quod inueniendum erat.

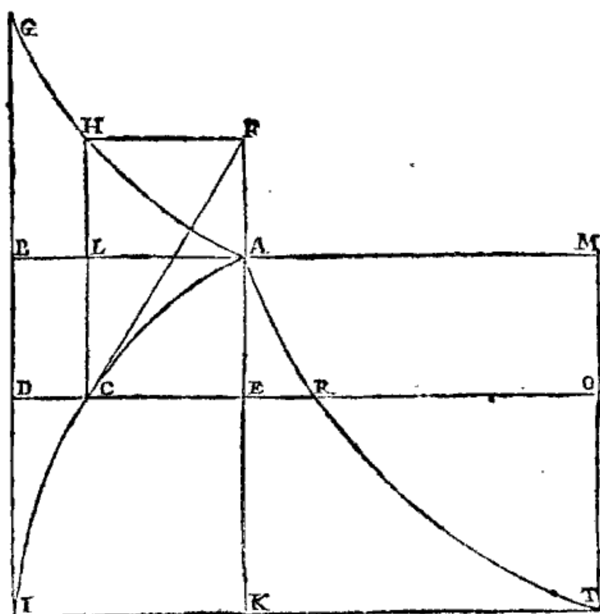
In huius 62 docebimus aliam methodum inueniendi proportionem inter DV & DOT.

PROP. 54. THEOREMA.

SIt parallelogrammum ABIK, sitque curva ACI talis naturæ, vt (ducta recta quacunque DE parallela & æquali rectæ AB curvam secante in C) ratio AB ad EC sit multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q. dico parallelogramum ABIK esse ad figuram ACIK vt P + Q ad Q. producatur recta IB in G & iungatur curua AHG talis naturæ, vt (ducta recta CF tangente curuam ACI in quolibet puncto C & ductis parallelis EC, FH) recta CH sit æqualis & parallela rectæ EF: manifestum est ex huius 7 rectam AE ad FE, seu LC ad HC esse vt P ad Q, cumque hoc semper fiat, euidens est figuram ACIB esse ad figuram ACIGH vt P ad Q; atque ex huius 11 figura ACIGH est æqualis figuræ ACIK, & ideo figura ACIB est ad figuram ACIK vt P ad Q, & compo-

ponendo parallelogrammum ABIK est ad figuram ACIK vt P + Q ad Q quod demonstrandum erat.

Si P sit minor quam Q, erit ACIK quælibet ex parabolis infinitis, si vero P sit maior quam Q, erit ACIK quodlibet ex trilineis infinitis. Ex hac quoque propositione manifestum est parallelogrammum ABIK esse ad figuram ABIC vt P + Q ad P; quod etiam ita innotescit, quoniam ratio AB ad EC



est multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q, hoc est ratio AB ad AL est multiplicata rationis BI ad LC in eadem ratione P ad Q, erit conuertendo, BI ad LC multiplicata rationis AB ad AL in ratione Q ad P; & ideo ex ipsa propositione, parallelogrammum ABIK est ad figuram ABIC vt P + Q ad P, quod demonstrandum erat.

PROP.

PROP. 55. THEOREMA.

EIsdem positis, quæ in antecedente: dico rationem figuræ ACIK ad figuram ACE esse multiplicatam rationis IK ad CE in ratione P + Q ad P. Ex antecedẽte ABIK est ad ACIK, vt P + Q ad Q, eodẽ modo ALCE est ad ACE vt P + Q ad Q, & ideo ABIK est ad ACIK vt ALCE ad ACE, & permutando ABIK est ad ALCE vt ACIK ad ACE, at ratio ABIK ad ALCE est composita ex ratione AK ad AE & ex ratione IK ad CE, & proinde ratio ACIK ad ACE componitur ex eisdem rationibus; at ratio IK ad CE est multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q & conuertendo, ratio AK ad AE est multiplicata rationis IK ad CE in ratione Q ad P, & componendo, ratio composita ex rationibus AK ad AE & IK ad CE (nempe ratio figuræ ACIK ad figuram ACE) est multiplicata rationis IK ad CE in ratione P + Q ad P, quod demonstrare oportuit.

PROP. 56. THEOREMA.

SVpposito ABIK rectangulo & reliquis positis vt in antecedente, si super figuris ABIK, ACIK, supponantur cylindrici recti, cuius vtriusque altitudo AB, item supposito cylindricum super ACIK secari a plano ipsi basi ACIK semiormali, & eam secante in recta AK: dico parallelopipedum super ABIK esse ad inferiorem truncum cylindrici super ACIK vt 4P + 2Q ad Q. Supponatur planum secans cylindricum super ACIK produci ut secet etiam parallelopipedum, manifestum est truncum eius inferiorem esse prisma triangulare parallelopipedi dimidium. Deinde sit rectangulum AMTK cum inscripta linea ART talis proprietatis, vt (sumpto ad libitum puncto E & ducta recta DEO ipsi AK perpendiculari & lineas ART, ACI, secante in punctis R, C,

item

item ducto per puncto E plano ipsi AK normali & inferiores cylindricorum truncos secante in triangulis rectangulis isoscelibus quorum bases sunt DE, CE) OE sit ad RE sicut triangulum super DE ad triangulum super CE. Patet triangulum super DE esse ad triangulum super CE seu OE ad RE in duplicata ratione DE ad CE, atque ratio DE ad CE est multiplicata rationis AK ad AE in ratione P ad Q; & ideo ratio OE ad RE est multiplicata rationis AK ad AE in ratione 2P ad Q, cumque hoc semper fiat vbicunque sumatur pũctum E, patet ex huius 54 rectangulum AMTK esse ad figuram ARTK vt 2P+Q ad Q: at OE semper est ad RE, vt triangulum super DE, nempe communis intersectio plani normalis ad AK cum prismate triangulari, ad triangulum super CE, nempe communem sectionem eiusdem prioris plani cũ trunco inferiore cylindrici super ACIK; antecedentes quoque quantitates, nempe omnes rectæ OE inter se, & omnia triangula super DE inter se, sunt æquales; & ideo vt omnes rectæ OE nempe rectangulum AMTK ad omnes RE nempe figuram ARTK ita omnia triangula super DE nempe prisma triangulare ad omnia triangula super CE nempe inferiorem truncum cylindrici super ACIK; & proinde prisma est ad truncum vt 2P+Q ad Q, & ideo duplum prismatis nempe parallelopipedum super ABIK est ad inferiorem truncum cylindrici recti super ACIK vt 4P+2Q ad Q, quod demonstrandum erat.

Atque ex huius 54 parallelopipedum super ABIK est ad cylindricum eiusdem altitudinis super ACIK vt P+Q ad Q, hoc est vt 4P+2Q ad $\frac{4PQ+2QQ}{P+Q}$, & proinde parallelopipedum super ABIK est ad eiusdem cylindrici truncum superiorem vt 4PP+6PQ+2QQ ad 3PQ+QQ; atque talis trũcus superior idem est cum trunco eiusdem cylindrici inferiore resecto a plano basem secante semnormaliter in recta BI, & ideo huius quoque trunci ad parallelopipedum patet ra-

O tio,

ctio, nempe vt 3PQ + QQ ad 4PP + 6PQ + 2QQ.

PROP. 57. THEOREMA.

POſito parallelopipedo & cylindrico habere altitudinē AK & reliquis vt in antecedente; ſi cylindricus rectus ſuper ACIK ſecetur a plano ad baſem ſeminormali & eam ſecante in recta AB. Dico parallelopipedū ſuper ABIK eſſe ad inferiorem truncum cylindrici ſuper ACIK in ratione P + 2Q ad Q. Sit quadratum AMTK cum inſcripta linea ART talis naturæ, vt (ſumpto ad libitum puncto E & ducta recta DEO ipſi AK perpendiculari & lineam ART ſecantę in puncto R, item ducto per punctum E plano ipſi AK normali, cuius interſectio cum trunco inferiore eſt rectangulum LAEC) AE ſit ad RE ſicut BA ad CE. Patet ex conſtructione rationem AE ad RE eſſe multiplicatam rationis AK ad AE in ratione P ad Q, & componendo, ratio AK ad RE, hoc eſt ratio KT ad RE, eſt multiplicata rationis AK ad AE in ratione P + Q ad Q; & ideo quadratum AMTK eſt ad figuram
25 Huius. ARTK vt P + 2 Q ad Q, at vt ABIK ad AMTK ita IK vel AB ad TK ſeu AK, & ideo rectangulum ABIK eſt ad figuram ARTK in ratione compoſita ex ratione P + 2Q ad Q & ex ratione AB ad AK. Quoniam AE eſt ad RE vt BA ad CE, erit rectangulum AE in CE nempe AECL æquale rectangulo AB in RE, cumque hoc ſemper fiat, erit cylindricus ſuper ARTK habens altitudinem AB æquale inferiori trunco cylindrici ſuper ACIK; & ideo parallelopipedum ſuper ABIK cum altitudine AB eſt ad cylindricum ſuper ARTK ſeu truncum inferiorem cylindrici ſuper ACIK vt baſis ABIK ad baſem ARTK, hoc eſt in ratione compoſita ex ratione P + 2 Q ad Q & ex ratione AB ad AK, at parallelopipedum ſuper ABIK cum altitudine AB eſt ad parallelopipedū ſuper ABIK cū altitudine AK vt AB ad AK; & proinde parallelopipedū ſuper ABIK cum altitudine AK eſt ad truncum inferiorem cylindrici ſu-

per

per ACIK vt P + 2 Q ad Q, quod demonstrandum erat.

Atque ex huius 54 parallelopipedum super A B I K est ad cylindricum eiusdem altitudinis super AC IK vt P + Q ad Q, hoc est vt P + 2 Q ad $\frac{QP+2QQ}{P+Q}$; & ideo parallelopipedum super ABIK altitudinis AK est ad truncum superiorem cylindrici super ACIK eiusdem etiam altitudinis AK vt PP + 3 P Q + 2 Q Q ad QQ; atque talis truncus superior idem est cum inferiore eiusdem cylindrici trunco resecto a plano basem seminormaliter secante in recta IK, & ideo eiusdem parallopipedi ad hunc truncum inferiorem eadem est ratio.

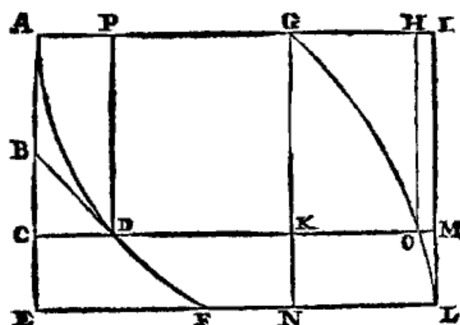
Ex huius 29, 56 & 57 manifestum est centrum æquilibrii figuræ A C I K ita diuidere rectam I K, vt pars versus I sit ad partem versus K in ratione 3P+Q ad P + Q, item centrum æquilibrii eiusdem ACIK ita dividere A K, ut pars versus A sit ad partem versus K in ratione P+Q ad Q.

In duabus præcedentibus, etiamsi facilitatis gratia sup-
ponatur A B I K rectangulum, conclusiones tamen non mi-
nus veræ sunt de parallelogrammo quolibet; nullo enim ne-
gotio demonstrantur ex æqualitate & analogia in magnitu-
dine & grauitate truncorum super rectangulis & eorum fi-
guris cum truncis super parallelogrammis quibuscunque &
corum figuris; quod etiam in sequentibus de figuris longi-
tudine infinitis intelligi velim.

PROP. 58. PROBLEMA.

Sit AEF angulus rectus sitque curva ADF talis naturæ, vt
(ducta recta DC ad libitum perpendiculari ad AE) ra-
tio EF ad CD sit multiplicata rationis AE ad AC in ratione
numeri imparis cuiuscunque ad numerum proxime minorem;
oportet inuenire rectam æqualem curvæ ADF. v. g. sit ratio
EF ad C D multiplicata rationis A E ad A C in ratione 5 ad
4; sitque (ope huius 2) ut recta AE ad curuam AF ita rectan-

gulum ad libitum AGNE ad mixtilineum AGLE, sitque latus rectum (nempe recta ducta in quadratoquadratum rectæ CD semper efficiens surdesolidum rectæ AC) curvæ A F,



l; AG, b; GI, c; IL, d; GH quotlibet æqualiter crescentes a; HO vel CA, z; manifestum est ex huius 7 BC esse $\frac{4z}{5}$ & CD $\sqrt{qq}\,\frac{z^5}{l}$
2 huius. & BD $\sqrt{q}(\sqrt{q}\frac{z^5}{l} + \frac{16z^2}{25})$; erit igitur BC ad BD ut CK ad CO, hoc est $\frac{4z}{5} : \sqrt{q}(\sqrt{q}\frac{z^5}{l} + \frac{16z^2}{25}) :: b : b + a$; & ideo $\frac{4bz + 4az}{5} = \sqrt{q}(\sqrt{q}\frac{b^4z^5}{l} + \frac{16b^2z^2}{25})$, & equatione reducta inuenitur HO seu $z = \frac{1024lb^2a^2 + 512lba^3 + 256la^4}{625b^4}$; & ideo manifestum est analystæ trilineum GIL esse compositum ex additione trilineorum, quadratici, cubici & quadratoquadratici, quorum omnium axes sunt GI, & bases, trilinei quadratici $\frac{1024lb^2c^2}{625b^4}$, cubici $\frac{512lbc^3}{625b^4}$ & quadratoquadratici
54 huius.

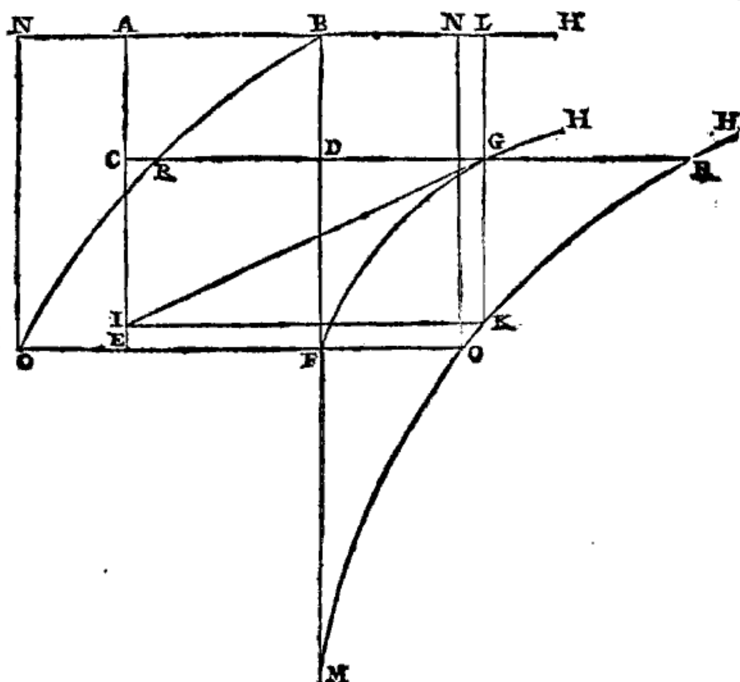
$256lc^4$;

$\frac{25lc^4}{625b^4}$; & proinde trilineum GOLI est $\frac{1024lc^3}{1875b^2} + \frac{128lc^4}{625b^3} + \frac{256lc^5}{3125b^4}$, & ideo recta AE est ad curuam AF vt bd seu rectangulum AGNE ad $bd + cd - \frac{1024lc^3}{1875b^2} - \frac{128lc^4}{625b^3} - \frac{256lc^5}{3125b^4}$ seu mixtilineum AGLE, datur igitur recta æqualis curvæ AF, quæ inuenienda erat. Quomodo inveniatur superficies facta ex rotatione curvæ A F circa rectam A G. euidens est ex huius 43. quoniam ex huius 57 facile est inuenire centrum grauitatis mixtilinei AGLE. quod si in æquatione reducta, ex vna parte inuenta fuisset non z sed z^2 (quod semper accidit, si ratio EF ad CD sit multiplicata rationis AE ad A C in ratione numeri paris ad numerum proxime minorem) inuenta fuisset tantum superficies genita ex rotatione curvæ A F circa rectam AG, vt patet ex huius 23 & 43.

PROP. 59. THEOREMA.

SIt parallelogrammum A B F E, sitque curva F G H talis naturæ, vt (ducta recta quacunque C G parallela rectæ A B curvam F H secante in G & rectam B F in D) ratio AB ad CG sit multiplicata rationis B D ad BF in ratione P ad Q. dico parallelogrammum A B F E esse ad figuram longitudine infinitam HAEFGH vt Q − P ad Q. producatur recta BF in M & ducatur curva MKH talis naturæ, vt (ducta recta GI tangente curvam F G H in quolibet puncto G & ductis parallelis G C, KI) recta G K sit æqualis & parallela rectæ C I: manifestum est ex huius 7 rectam AC ad CI vel L G ad GK esse vt P ad Q, cumque hoc semper fiat, euidens est figuram HFBH esse ad figuram H F M H ut P ad Q, atque ex huius 11 figura H F M H est æqualis figuræ H A E F H, & ideo figura H A E F H est ad figuram H F B H vt Q ad P, & per conuersionem rationis, H A E F H est ad parallelogrammum

mum ABFE ut Q ad Q − P, & conuertendo ut parallelogrammum ABFE ad figuram HAEFH ita Q − P ad Q, quod demonstrandum erat.



PROP. 60. THEOREMA.

SVpposito ABFE rectangulo & reliquis positis sicut in antecedente; si super figuris ABFE, HAEFH, supponantur cylindrici recti, cuius prioris altitudo AB, secundi autem altitudo infinita, item supposito cylindricum super HAEFH secari a plano ipsi basi seminormali & eam secante in recta AE: dico parallelopipedum super ABFE esse ad inferiorem truncum cylindrici super HAEFH ut 2Q − 4P ad

ad Q. consideratis considerandis demonstratio non differt ab huius 56.

PROP. 61. THEOREMA.

EIsdem suppositis cylindricis, qui in antecedente; sed cum altitudine BF, & supposito cylindricum super H AEFH secari a plano ipsi basi seminormali & eam secante in recta AH: dico parallelopipedum super ABFE esse ad inferiorem truncum cylindrici super HAEFH in ratione 2Q−P ad Q. Sit primò P minor quam Q, sitque vt AB ad CG ita BD ad DR protractam versus AE, & compleatur quadratum NBFO ex parte AE, item ex omnibus punctis R imaginetur curua BRO: patet ex constructione rationem BD ad DR esse multiplicatam rationis BD ad BF in ratione P ad Q, & diuidendo, ratio DR ad BF, nempe ratio DR ad FO, est multiplicata rationis BD ad BF in ratione Q−P ad Q, & ideo quadratum NBFO est ad figuram BROF in ratione 2Q−P ad Q, at vt ABFE ad NBFO ita EF seu AB ad OF seu BF, & ideo rectangulum ABFE est ad figuram BROF in ratione composita ex ratione 2Q−P ad Q & ex ratione AB ad BF. Quoniam est vt AB ad CG ita BD ad DR, erit rectangulum AB in DR æquale rectangulo BD in CG, at rectangulum AB in DR est communis intersectio cylindrici recti super BROF altitudinem habentis AB cum plano secante super RD ad basem normali, & rectangulum BD in CG est intersectio eiusdem prioris plani producti cum trunco inferiore cylindrici super HAEFH; cumque hæ intersectiones semper contingant esse æquales, manifestum est inferiorem truncum cylindrici super HAEFH æqualem esse cylindrico super BROF altitudinem habenti AB; & ideo parallelopipedum super ABFE cum altitudine AB est ad cylindricum super BROF seu truncum inferiorem cylindrici super HAEFH vt basis ABFE ad basem BROF, hoc est in ratione composita ex ratione 2Q−P 54 huius.

ad

ad Q & ex ratione AB ad BF, at parallelopipedum super AB FE cum altitudine AB est ad parallelopipedũ super eadẽ AB FE cum altitudine BF vt AB ad BF; & proinde parallelopipedum super ABFE cum altitudine BF est ad inferiorem truncum cylindrici super HAEFH vt 2Q—P ad Q, quod &c.

Quod si P sit maior quam Q; sit vt AB ad CG ita BD ad CR protractam versus LK, & compleatur quadratum NAEO ex parte LK, item ex omnibus punctis R imaginetur curua ORH: patet ex constructione rationem BD ad CR esse multiplicatam rationis BD ad BF in ratione P ad Q, & sumendo excessum antecedentis supra consequentem ad consequentem, ratio BF ad CR nempe ratio EO ad CR est multiplicata rationis BD ad BF seu AC ad AE in ratione P—Q ad Q; & ideo quadratum NAEO est ad figuram longitudine infinitam HAEOH vt 2Q—P ad Q, at vt ABFE ad NAEO ita EF seu AB ad EO seu BF, & ideo rectangulum ABFE est ad figuram HAEOH in ratione composita ex ratione 2Q—P ad Q, & ex ratione AB ad BF. quoniam est vt AB ad CG ita BD ad CR, erit rectangulum AB in CR æquale rectangulo BD in CG, at rectangulum AB in CR est communis intersectio cylindrici recti super HAEOH altitudinem habentis AB cũ plano secante super CR ad basem normali, & rectangulum BD in CG est intersectio eiusdem prioris plani cum trunco inferiore cylindrici super HAEFH; cumque hæ intersectiones semper contingant esse æquales, manifestum est inferiorem truncum cylindrici super HAEFH æqualem esse cylindrico super HAEOH altitudinem habenti AB, & ideo parallelopipedum super ABFE cum altitudine AB est ad cylindricum super HAEOH seu truncum inferiorem cylindrici super HAEFH ut basis ABFE ad basem HAEOH, hoc est in ratione composita ex ratione 2Q—P ad Q & ex ratione AB ad BF, at parallelopipedum super ABFE cum altitudine AB est ad parallelopipedum super eadem ABFE cum altitudine BF vt AB ad BF; & proinde parallelopipedum super ABFE cum

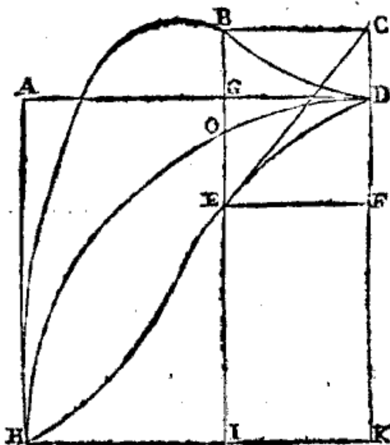
alti-

altitudine BF est ad inferiorem truncum cylindrici super HAEFH vt 2Q—P ad Q, quod demonstrare oportuit.

Ex his & huius 29, 37, non difficile est colligere centrum æquilibrii figuræ HAEFH ita assignari in recta AH, nempe AB esse ad distantiam centri ęquilibrii à puncto A vt 2Q—4P ad Q—P; item eiusdem figuræ centrum æquilibrii ita diuidere rectam AE ut pars versus A sit ad partem versus E in ratione Q—P ad Q.

PROP. 62. THEOREMA.

SIt quadrans circuli KDOH & recta DA parallela radio HK, sitque curva DEH talis naturæ, vt (ducta recta quacunque GI parallela & æquali rectæ DK curvam circularem



secante in O & curvam DEH in E) ratio GI & ad EI sit triplicata rationis GI ad OI. dico quadrantem circuli KDOH esse ad figuram KDEH vt 4 ad 3, hoc est, curvam DEH diuidere quadrantē circuli in ratione 3 ad 1. ducatur curva HBD talis

naturæ, vt (ducta recta EC tangente curvam HED in quolibet puncto E & ductis parallelis EF, BC) recta EB sit æqualis & parallela rectæ CF: manifestum est ex huius 7 rectam CF seu BE esse triplam rectæ EO, cumque hoc semper fiat, evidens est figuram HBDE esse triplam figuræ HODE, atque ex huius 11 figura HBDE est æqualis figura HEDK; & proinde figura HEDK est ad figuram HODE in ratione 3 ad 1, diuidit ergo curva HED quadrantem circuli in ratione 3 ad 1, quod demonstrare oportuit.

Quod si ratio GI ad EI esset quintuplicata rationis GI ad OI, curva HED quadrantem circuli diuideret in ratione 5 ad 3; si autem septuplicata, in ratione 7 ad 5; & sic in genere, si ratio GI ad EI sit multiplicata rationis GI ad OI in ratione cuiuscunque numeri imparis ad vnitatem, curva HED dividet quadrantem circuli in ratione eiusdem numeri imparis ad numerum imparem proxime minorem, quæ omnia demonstrantur sicut hoc theorema. Eodem prorsus modo demonstratur nõ solum illa Vallisij interpositio qua spatium cissoidale mensurat in libro de cycloide, sed etiam omnes fortassis aliæ quæ imaginari possunt, supposita primæ interpositæ figuræ mensura. Quod si ratio GI ad EI sit multiplicata rationis GI ad OI in ratione numeri cuiuscunque paris ad vnitatem, facile daretur figuræ KHED quadratura ope huius 54, ut docet Vallisius in sua Arithmetica infinitorum; & ideo innotescit in recta DK centrum æquilibrij figuræ DEHK ope huius 37. Hinc etiam evidens est DEF eandem semper habere rationem ad DEO quam habet DEHK ad DEHO, quod summopere notandum, nam (præter multa alia pulcherrima problemata) si secetur conois parabolica plano ad axem parallelo, ex data eiusdem ab axe distantia, dabitur huius ope utrumlibet conoidis segmentum.

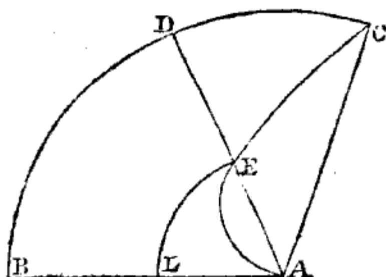
PROP. 63. THEOREMA.

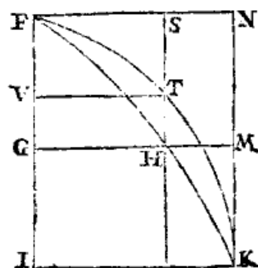
Sit curvæ cycloidis primariæ semissis CBA, eius basis CG, circulus genitor AEG basem tangens in puncto G a diametro GA. dico curvam CBA duplam esse rectæ AG. sit AILG quadratum, sitque figura NAGLN talis naturæ, vt (ducta recta quacunque FM parallela rectæ AI) ratio AI vel AG ad FM sit subduplicata rationis AF ad AG: manifestum est ex huius 59 figuram infinitam NAGLN esse duplam quadrati AILG. per F diametri AG punctum quodlibet ducatur BM rectę AI parallela, cycloidi & curvæ LN occurrens in punctis B,M, secans circulum & rectam IL vt in figura; iungantur rectæ AE, EG, & illis parallelæ DB, BH: ex huius 8 patet BD tangere cycloidem in puncto B & BH contingenti esse perpendicularem. ut BF ad BH ita EF ad EG seu FA ad AE, atque ratio AF ad AG duplicata est rationis AF ad AE, & ideo ratio AF ad AG est duplicata rationis BF ad BH, sed ratio AF ad AG est etiam duplicata rationis AG ad FM, & ideo ut BF ad BH ita AG vel FK ad FM, cumque semper ita sit, patet ex huius 2 rectam AG esse ad curvam ABC in ra-

ratione subdupla, nempe vt quadratum AILG ad figuram NAGLN, quod demonstrare oportuit.

PROP. 64. THEOREMA.

SIt circuli sector CAB includens spiralem AEC talis naturæ, vt (ducta recta quacunque AE producta arcum secante in D) ratio AC ad AE sit multiplicata rationis CB ad DB in ratione P ad Q. sit angulus rectus FIK & curua FHK talis naturæ, vt (ducta recta quacunque GH parallela rectæ IK) ratio IK ad GH sit multiplicata rationis FI ad FG in ratione P ad Q; patet ex huius 14 rectangulum FNKI figuræ FIK circumscriptum esse ad figuram FHKI vt arcus BC ad axem figuræ spiralis AEC evolutæ, & proinde ex huius 54 arcus BC est ad axem figuræ AEC evolutæ ut P+Q ad Q. sit vt P+Q ad Q ita arcus BC ad rectam FI, cui sit normalis recta IK æqualis rectæ AC, sitque figura FHKI talis naturæ, vt (ducta recta quacunque GH parallela rectę IK) ratio IK ad GH sit multiplicata rationis FI ad FG in ratione P ad P+Q: dico figuram FHKI esse spatium spirale AEC evolutum. Ex rectæ FI quolibet puncto G sit rectæ FI normalis GH occurrens curvæ FHK in H, sitque rectæ GH æqualis AE producta in D. arcus BC est ad axem figuræ AEC euolutæ nempe FI vt





vt P + Q ad Q; eodemq; modo arcus EL est ad axem figuræ AE euolutæ ut P + Q ad Q; & ideo vt arcus BC ad rectam FI ita arcus LE ad axem figuræ AE euolutæ, & permutando, vt arcus BC ad arcum LE ita recta FI ad axem figuræ AE evolutæ, at ratio arcus BC ad arcum LE est composita ex ratione arcus BC ad BD & ex ratione arcus BD ad arcum LE seu rectę CA ad rectã EA, & ideo recta FI est ad axem figurę AE evolutę in ratione cõposita ex ratione arcus BC ad arcum BD & ex ratione rectæ CA ad rectam EA; sed ratio CA ad EA est multiplicata rationis BC ad BD in ratione P ad Q, & conuertendo, componendo & rursus conuertendo, ratio AC ad AE seu IK ad GH est multiplicata illius rationis (quæ componitur ex ratione arcus BC ad arcum BD & ex ratione rectæ CA ad rectam EA) nempe rationis rectæ FI ad axem figurę AE euolutæ in ratione P ad P + Q, sed ratio IK ad GH est multiplicata rationis FI ad FG in ratione P ad P + Q; & proinde FG est axis figuræ AE euolutæ, suntque EA, GH, æquales; & ideo (cum hoc semper fiat) manifestum est ex huius 14 & eius consectario figuram FHKI esse figuram AEC evolutam, quod demonstrandum erat.

Figura FHKI est illa descripta in huius 54, cumque poterit inveniri recta illam tangens in puncto dato ope huius 7, poterit quoque (ex consectario huius 18) recta duci spiralem AEC tangens in puncto dato: sæpissimè etiam (vt patet ex huius 58) inuenitur recta æqualis curvæ FHK, quæ etiam æqualis est spirali curvæ AEC.

Ope huius 15 vel 16 nullo negotio probatur sectorem BAC esse ad spatium spirale AEC ut 2P + Q ad Q.

PROP. 65. THEOREMA.

SIt circuli sector CAB includens spiralem AEC talis naturæ, vt (ducta recta quacunque AE producta arcum secante in D) ratio DE ad BA sit multiplicata rationis CD ad

CB

CB in ratione P ad Q. sit FN ęqualis rectæ B A; item angulus rectus FNK & curva FK talis naturæ, vt (ducta recta quacunque HM parallela rectę FN) ratio HM ad FN sit multiplicata rationis KM ad KN in ratione P ad Q. cõpleatur rectangulum FNKI producaturque MH in G; & ducatur recta DA, ita vt DE sit æqualis rectæ HM, & ideo EA æqualis erit rectæ GH. Ratio DE ad BA seu HM ad FN est multiplicata rationis CD ad CB in ratione P ad Q, atque ratio HM ad FN est multiplicata rationis KM ad KN seu IG ad IF in eadem ratione P ad Q; & ideo ut CD ad CB ita IG ad IF, estque vt IK ad GH ita AC ad AE, & ideo (ex huius 14) vt rectangulum FK ad figuram FHKI, hoc est (ex huius 54) ut P+Q ad P ita arcus BC ad axem figuræ AEC evolutæ, qui sit FI reliquis manentibus ut prius, sitq; curva FTK talis naturæ, vt (ducta recta quacunq; STH parallela rectæ FI) IF sit ad ST ut figura FHKI ad figuram FHG. Dico figuram FTKI esse spatium spirale AEC evolutum. Manifestum est constructione rectam FI esse axem figuræ AEC euolutæ; eodemque modo (vt prius ostensum est) demonstratur rectangulum FH esse ad figuram inscriptam FHG ut arcus LE ad axem figuræ AE euolutæ. Ratio FI seu axis figuræ AEC euolutæ ad axem figuræ AE evolutæ est composita, ex ratione rectæ FI ad arcum BC seu figuræ FHKI ad rectangulum ANKI, ex ratione arcus BC ad arcum BD seu rectæ IF ad rectam FG (quod sic probo, vt CD ad CB ita IG ad IF, & diuidendo, & conuertendo, vt CB ad BD ita IF ad FG) seu rectanguli FNKI ad rectangulum FNMG, ex ratione arcus BD ad arcum LE seu rectę DA ad rectam EA nempe rectę GM ad rectam GH seu rectanguli FNMG ad rectangulum FSHG, & ex ratione arcus EL ad axem figuræ AE euolutę seu rectanguli FSHG ad figuram FHG; at patet rationem figurę FHKI ad figuram FHG componi ex eisdem rationibus, & ideo vt FI ad axẽ figuræ AE evolutæ ita figura FHKI ad figuram FHG, hoc est vt FI ad ST vel FV, est igitur FV

axis

axis figuræ AE evolutæ, cumque ordinatim applicata VT sit æqualis rectæ AE, & hoc semper fiat vbicumque sumatur punctum E, manifestum est (ex consectario 14 huius) figuram FTKI esse spatium spirale AEC euolutum, quod demonstrare oportuit.

Ope huius 7 potest duci tangens ad curvam FTK, cum sit e numero earũ quas Cartesius appellat geometricas, & proinde potest per huius 2. comparari cum suo axe vel base, cui si reperiatur recta æqualis, erit eadem recta æqualis curvæ AEC; vt cunque potest semper duci recta tangens curvam AEC in puncto dato ope consectarii huius 18.

Ex huius 15 & 57 nullo negotio inuenitur sectorem BAC esse ad spatium spirale AEC ut $Q^2 + 3PQ + 2P^2$ ad $2P^2$.

Supposito telluris motu, linea descripta à graui descendente versus centrum terræ A esset CEA, si modo ratio P ad Q sit dupla; de qua magna orta est controuersia inter celeberrimos Mathematicos RR. PP. Stephanum de Angelis & Ioan. Baptistam Ricciolium, quæ fortasse dirimetur, si consideret doctissimus Ricciolius vires impulsuum esse in directa proportione cum velocitatibus, quibus appropinquat corpus mobile ad corpus resistens, abstrahendo ab omni alio motu; mihi enim nihil apparet evidentius; neque vllus est architecturæ militaris peritus, qui præcedens axioma non supponit in tractando de tormentis bellicis. Quod ad controuersiæ partem purè geometricam, existimo nullum nunc dubitare, quod graue cadens in centrum terræ tempore sex horarum semper sit extra semicirculum. Evidens est calculum R. P. Stephani de Angelis (dialogo primo pag. 19.) esse legitimum; demonstratio autem D. Manfredi (qua contrarium ostendere conatur pag. 17.) in hoc est erronea, quod tacitè supponat (ponendo CHA semicirculum) grauis descensum ad centrum terræ durare sex horas; nam centrum attingit (supponendo Riccioli observationes & terræ semidiametrum pedum 25870000) tempore minutorum 21 se-

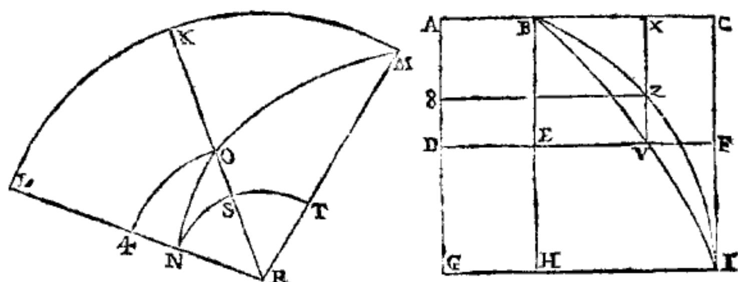
cun-

cundorum 53; neque in his vllius est momenti siue motus fiant ab intrinseco vel extrinseco, geometria enim & statica abstrahunt ab omni causa physica, quippe incerta & non euidente.

PROP. 66. THEOREMA.

SIt circuli sector LRM, eodemque centro arcus NT similis arcui LM, sitque spiralis NOM talis naturę, vt (ducta recta quacunque RSOK) ratio rectæ SO ad rectam TM sit multiplicata rationis arcus LK ad arcum LM in ratione P ad Q. sit BC æqualis rectæ MT, BH ad libitum, item angulus rectus CBH, & curva BVI talis naturæ, vt (ducta recta quacunque EV parallela rectæ BC) ratio EV ad BC sit multiplicata rationis BE ad BH in ratione P ad Q; compleatur rectangulum BCIH, & sit rectangulum ABHG cuius latus AB ęquale rectę TR: ex huius 54 patet rectangulum BCIH esse ad figuram BVIH vt P+Q ad Q; ducatur recta DEVF, ita vt EV sit ęqualis rectę OS, & ideo RO est ęqualis rectę DV. ratio EV ad HI seu OS ad MT est multiplicata rationis BE ad BH in ratione P ad Q, sed ratio OS ad TM est multiplicata rationis LK ad LM in eadem ratione P ad Q, & ideo vt BE ad BH ita LK ad LM, & ut DV ad GI ita RO ad RM, & ideo ex huius 14, ut ACIG ad ABVIG ita arcus LM ad axem figurę MONR euolutæ: sit vt ACIG ad ABVIG ita arcus LM ad rectam BH reliquis in figura ACIG se habētibus ut prius; sitque curva BZI talis naturæ, ut (ducta recta ad libitum XZV parallela rectę BH) figura ABVIG sit ad figuram ABVD vt recta BH ad rectam XZ vel A8. Dico figuram ABZIG esse spatium spirale RNOM evolutum. Manifestum est ex constructione rectam AG esse axem figuræ RNOM euolutæ; eodemque modo (ut prius ostensum est) demonstratur rectangulum AV esse ad figuram ABVD ut arcus 40 ad axem figuræ RNO euolutæ. Ratio AG seu axis figuræ RNOM euolutæ

lutæ ad axem figuræ R N O evolutæ est composita, ex ratione axis figuræ RNOM evolutæ ad arcum LM seu figuræ AB VIG ad rectangulum ACIG, ex ratione arcus L M ad arcum LK seu rectæ I C ad rectam CF vel rectanguli ACIG ad rectangulum ACFD, ex ratione arcus LK ad arcum 4O seu rectæ KR ad rectam OR nempe D F ad D V vel rectanguli AC FD ad rectangulum AXVD, & ex ratione arcus 4O ad axem



figuræ RNO evolutæ seu rectanguli AXVD ad figuram AB VD; at perspicuum est rationem figuræ ABVIG ad figuram A B V D componi ex eisdem rationibus, & ideo ut figura ABVIG ad figuram ABVD seu vt A G ad A8 ita AG axis figuræ R N O M evolutæ ad axem figuræ R N O evolutæ, qui igitur est A8; cumque ordinatim applicata 8Z sit æqualis rectæ OR, & hoc semper fiat vbicunque sumatur punctum O, manifestum est (ex Consectario 14 huius figuram A B Z I G esse figuram RNOM euolutam, quod demonstrare oportuit.

Curua BZI est ex earum numero quas Cartesius appellat geometricas, & igitur per huius 7 potest duci recta eam tangens in puncto dato, potest quoque comparari cum recta ope huius 2, & proinde curua quoque NOM illi æqualis, eique duci tangens in puncto dato.

Ex huius 15 & 56 non difficile erit demonstrare (posita ratione HI ad HG vt P ad Y) sectorem RLM esse ad figuram

RNOM vt P ad $\frac{Y^2}{P} + \frac{PQ}{2P+Q} + \frac{2PQY}{P^2+2PQ+Q^2}$

Notandum demonstrationem *65* & *66* huius esse maximè vniuersalem, sed prælo currente non memini illam debito loco inserere.

Hic examinauimus tria spiralium genera; quorum primũ idem est cum illis duobus, quæ mensurauit R. P. Stephanus de Angelis in libro suo de Spiralibus & in fine lib. 5. de parabolis; secundum quoque idem est cum illis duobus, quæ dimensus est in libro de Spiralibus inuersis; tertium etiam excogitauit idem Mathematicus sagacissimus, illudque mihi nuper communicauit.

Summopere notandum omnem figuram posse concipi sicut inuolutam, & methodo nostra inuenietur eadem euoluta; hinc enim non parùm augmentetur geometria.

Adeo fertilis est hæc nostra methodus, vt difficile fere sit aliquid proponere illi omnino impervium; quod ut experiamur, soluantur duo illa problemata quæ proposuit Renatus Franciscus Slusius in prop. 8. de infinitis hyperbolis R. P. Stephani de Angelis. Sit AB, b; BD, a; sitque secundum tenorem quæstionis, vt b^2 ad $ba - a^2$ ita a^2 ad $\frac{ba^3 - a^4}{b^2}$ quadratum rectæ DC, & ideo (ex huius 54) summa omnium quadratorum ab infinitis DC erit $\frac{b^3}{30}$, at summa totidẽ quadratorum rectæ AB est b^3; cum itaque hæ quadratorum summæ sint duplæ truncorum inferiorum, qui secantur in cylindricis rectis super ACB, AEFB, a plano basi seminormali, erit (ex huius 23) ut b^3 ad $\frac{b^3}{30}$ nempe vt 30 ad 1, ita cylindrus ex rotatione AEFB circa AB ad solidum rotundum ex rotatione ACB circa eandem AB. Sit secundum propositum vt in eiusdem de infinitis hyperbolis prop. 10. sitque ratio AB ad

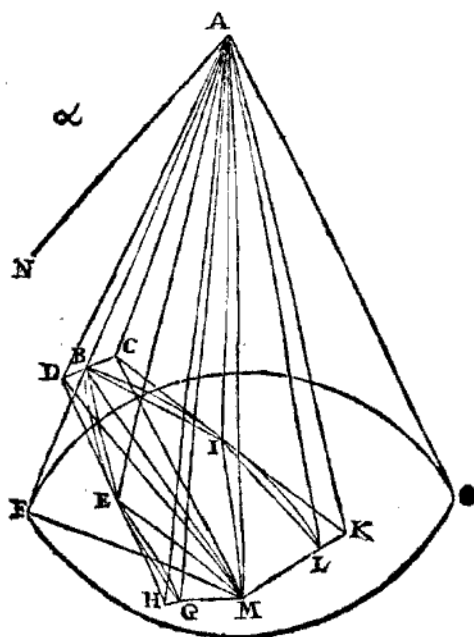
BD

BD multiplicatā rationis AD ad DC in ratione P ad Q. sitque ratio AB ad BD multiplicata rationis EA ad DO in ratione P ad Q, manifestum est EOB esse curuam in huius 54 descriptam; & ideo cubus ex latere EA vel AB est ad inferiorem truncum cylindrici recti super EOBA resecti à plano basem seminormaliter secante in recta EA ut $P^2 + 3PQ + 2Q^2$ ad Q^2; est autem vt EA ad DO ita ex positione AD vel KH ad DC; & ideo rectangulum EA in DC æquale est rectangulo DO in KH, cumque hoc semper fiat, manifestum est cylindricum super ACB (cuius altitudo EA) æqualem esse trunco inferiori cylindrici recti super EOBA resecti a plano basem seminormaliter secante in recta EA, & ideo vt $P^2 + 3PQ + 2q_2$ ad q^2 ita EABF ad ACB.

Hæc problemata particularia a me selecta sunt tanquam difficiliora & maioris momenti inter geometrarum inuenta, vltra quędam a me nunc primùm soluta; totus namque archimedis tractatus de sphæra & cylindro facilè demonstratur ex huius 3 ad modum huius 46 & aliquot sequentium; liber de conoidibus sphęroidibus & tota Lucę Valerii doctrina ex huius 21; tota Guldini, Ioannis de la Faille & Andreæ Tacquet doctrina ex huius 35 & aliquot sequentium: fateor tamen me nullo modo potuisse inuenire rationem inter curuā ellipticam vel hyperbolicam & rectā, etiamsi in hoc tractatulo multi diuersi sint modi illas examinandi; ita ut facilè credam hanc rationem esse non Analyticā & vno gradu esse superiorem illâ inter circulum & diametri quadratum, sed hoc demonstratu non est adeo facile. Non prætendo hanc methodum inseruire resolutioni omnium problematum irregularium, quæ infinita sunt numero & difficultate, qualia præsertim sunt illa de corporum & superficierum sectione irregulari a planis, vel aliis superficiebus, inter quæ tamen sequens exhibeo satis pulchrum, placet enim miscellanea quædam non prorsus inutilia hic adiungere.

PROP. 67. THEOREMA.

SIt conus rectus AFO, cuius axis A M, qui secetur a duobus planis AML, AMG, quorum intersectiones cum coni superficie sint rectæ AL, AG; seceturque adhuc idem conus AFO a plano vtcunq; efficiente cum superficie coni communem sectionem GEBIL curuam; ita vt ab his sectionibus



excavetur a cono pyramis quædam conica ALMGEBI cuius vertex A & basis figura BILMGEB contenta a tribus planis ALM, AMG, MGEBIL, & superficie conica AGEBIL; ex

axis

axis puncto M trium planorum communi sectione in latus coni AF sit perpendicularis recta MF. Dico pyramidem (cuius basis est planum æquale superficiei conicæ AGEBIL & altitudo MF) æqualem esse pyramidi conicæ ALMGEBI. Si dictæ pyramides non sint æquales, sit earum differentia α: & pyramidi conicæ inscribatur pyramis AMGEBIL constãs ex pyramidibus triangularibus MGEA, MEBA, MBIA, MILA; eidem quoque pyramidi conicæ circumscribatur alia pyramis constans ex pyramidibus triangularibus MHDA, MDCA, MCKA, ita vt differentia pyramidis inscriptæ & circumscriptæ sit minor quam α. Manifestum est pyramidis MHDA altitudinem esse MF, ex suppositione enim triangulum HDA conum tangit, & ideo normalis ex M ad HDA in rectã contactus seu latus coni normaliter cadit: eodem modo probatur MF esse altitudinem, ex vertice M, omnium reliquarum pyramidum triangularium, e quibus constatur pyramis circumscripta, & ideo pyramis, cuius basis æqualis est omnibus triangulis AHD, ADC, ACK, & altitudo MF, æqualis est pyramidi circumscriptæ, & proinde maior pyramide conica, sed maior etiam est pyramide cuius basis est planum æquale superficiei conicæ AGEBIL & altitudo MF, quoniam eandem cum illa habens altitudinem, basem habet maiorem, quippe illi (dum conuexa existit) circumscriptã. Deinde pyramis triangularis MGEA (posita vertice M) minorem habet altitudinem quam MF, quoniam eius basis cadit intra superficiem coni, eodem modo omnes pyramides triãgulares pyramidem inscriptam componentes minorem habent altitudinem quam MF, & ideo pyramis (cuius altitudo MF & basis ęqualis basibus omnium pyramidum triangularium pyramidem inscriptam componentium) maior est pyramide inscripta, sed hæc pyramis minor est pyramide basem habente planum æquale superficiei conicæ AGEBIL & altitudinem MF, quoniam eandem habens altitudinem basem habet minorem, nempe illi dum conuexa existit inscriptam,

ſcriptam, & ideo pyramis inſcripta multo minor eſt eadem pyramide baſem habente planum æquale ſuperficiei conicę AGEBIL & altitudinem MF, ſed pyramis inſcripta etiam minor eſt pyramide conica; pyramis igitur inſcripta minor eſt pyramide conica & minor etiam pyramide conicam ſuperficiem baſem habente, pyramis verò circumſcripta utravis harum pyramidum demonſtrata eſt maior, & ideo maior eſt differētia inter pyramidem circumſcriptam & inſcriptam quam inter pyramidem conicam & pyramidem quæ ſuperficiem conicam pro baſe habet; ſed differentia inter pyramidem circumſcriptam & inſcriptam eſt minor quam α, & proinde differentia inter pyramidem conicam & pyramidem (quæ ſuperficiem conicam pro baſe habet) eſt multo minor quam α, quod eſt abſurdum, ponitur enim α differentia inter dictas pyramides; non ergo differunt pyramis conica AMGEBIL & pyramis cuius baſis eſt ſuperficies plana ęqualis conicæ ſuperficiei AGEBIL & altitudo recta MF, & ideo æquales ſunt, quod demonſtrandum erat.

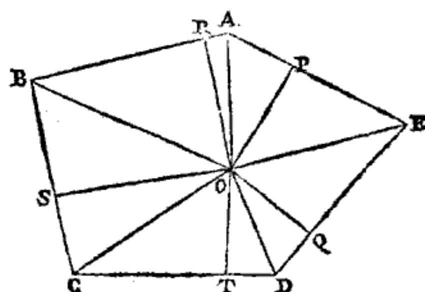
Ex vertice coni A in baſem pyramidis conicæ MGEBIL (ſi opus eſt) productam demittatur perpendicularis recta AN; manifeſtum eſt ex hoc Theoremate MF eſſe ad AN vt baſis pyramidis conicæ MGEBIL ad ſuperficiei conicæ portionem AGEBIL.

PROP. 68. THEOREMA.

Si in rectilineo quocunque æquilatero aſſignetur punctum, & ab illo puncto in omnia rectilinei latera demittantur perpendiculares rectæ; erit rectangulum ex ſemiſſe ſummæ perpendicularium & & perimetro rectilinei ad rectilineum, vt numerus laterum rectilinei ad vnitatem.

SIt rectilineum æquilaterum ABCDE: à puncto O intra rectilineum demittantur in omnia rectilinei latera perpen-

pendiculares rectæ OR, OS, OT, OQ, OP. dico rectangulũ ex semissæ summæ perpendicularium & ambitu rectilinei esse ad rectilineum vt numerus laterum ad vnitatem. Ex puncto O diuidatur rectilineum in triangula AOB, BOC, COD, DOE, EOA, quorum triangulorum bases ex suppositione sunt inter se æquales. Triangulum AOB est æquale rectãgulo ex semisse perpendicularis OR & base AB, cumque omnia rectilinei latera sint æqualia rectæ AB, erit rectangulum ex semisse perpendicularis OR & ambitu rectilinei ad rectangulum ex semisse perpendicularis OR & recta AB seu triangulum AOB, vt numerus laterum rectilinei ad vnitatem, eodem modo in quolibet ex reliquis triangulis, vt rectangulum ex semisse perpendicularis ex trianguli vertice O in basem demissæ & ambitu rectilinei ad idem triangulum, ita nu-



merus laterum rectilinei ad vnitatem; cumque omnia triangula simul sint æqualia ipsi rectilineo, & omnia dicta rectangula sint æqualia rectangulo ex semissæ summæ perpendicularium & ambitu rectilinei; erit vt vna antecedentium nempe numerus laterum ad vnam consequentium nempe vnitatem, ita omnes antecedentes nempe rectangulum ex semisse summæ perpendicularium & ambitu rectilinei ad omnes

con-

consequentes nempe ipsum rectilineum, quod demonstrare oportuit.

CONSECTARIVM.

Hinc sequitur (si in rectilineo æquilatero quocunque assignentur duo puncta & ab eisdem ad omnia rectilinei latera ducantur perpendiculares) perpendiculares ab vno puncto demissas æquales esse perpendicularibus ex altero puncto demissis.

PROP. 69. THEOREMA.

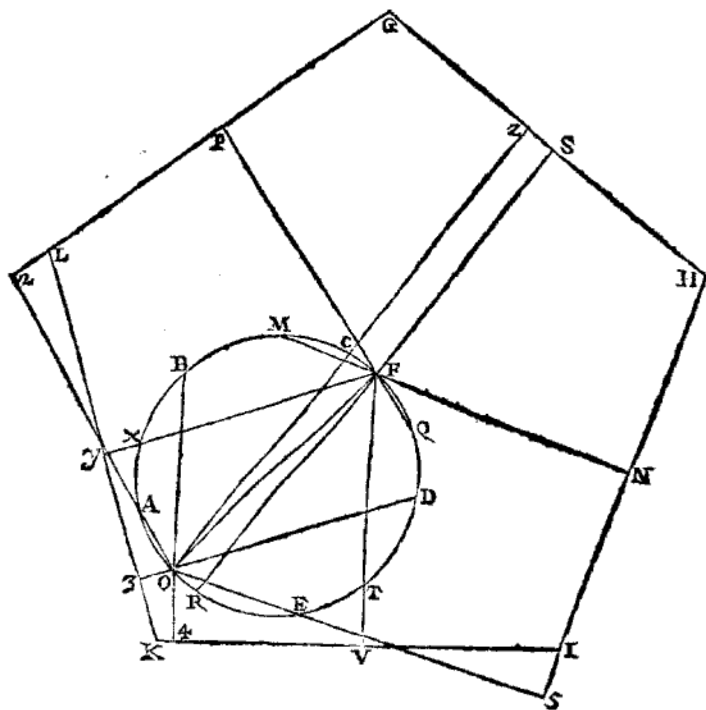
Si circuli circumferentia diuidatur in partes quotcunque æquales & numero impares, & a quolibet peripheriæ pũcto ad omnes eiusdem diuisiones rectæ ducantur: si circulus dividatur in tres partes æquales, erit summa primarum æqualis vltimæ; si in quinque, erit summa primarum & vltimæ æqualis summæ secundarum; si in septem, erit summa primarum & tertiarum æqualis summæ secundarum & vltimæ: si in nouem, erit summa primarum, tertiarum & vltimæ æqualis summæ secundarum & quartarum; atque ita deinceps in infinitum.

Dicimus autem rectas primas esse illas, quæ ducuntur ad diuisiones ex vtraque parte puncto assignato proximas; secundas, illas rectas quæ ducuntur ad diuisiones primis ex vtraque parte succedentes; tertias, quæ secundis succedunt, &c; rectam vero vltimam, illam quæ ducitur ad diuisionem à puncto assignato remotissimam.

Sit circuli circumferentia ABCDE diuisa in partes quotcunque æquales in punctis A, B, C, D, E, sitq; O quodlibet punctum in circumferentia; à quo ad omnes diuisiones ducantur rectæ OA, OE, OB, OD, OC: dico summam primarum & vltimæ nempe OA + OE + OC esse æqualem summæ secundarum nempe OB + OD. Ex puncto O ducatur

cir-

circuli diameter O F, & per punctum F ducantur rectis O A, OB, OC, OD, OE, parallelæ QFP, FTV, RFS, FXY, MFN, & quoniam rectæ OA, OB, OC, OD, OE, efficiunt inter se angulos æquales, igitur rectæ QFP, FTV, RFS, FXY, MFN, efficiunt inter se etiam angulos æquales: centro igitur F de-



scribatur polygonum æquilaterum & æquiangulum GHI KL, cuius latera bifariam & ad angulos rectos secentur a rectis per F ductis; & proinde eadem latera normaliter secentur a rectis per O ductis, prioribus quippe parallelis, & ideo rectæ FP, FS, FN, FV, FY, sunt æquales rectis O2, OZ,

O5, O4, O3, ex antecedente; atque recta O2 superat rectam FP excessu AO, & recta O5 superat rectam FN excessu OE, & recta OZ superat rectam FS excessu CO; igitur rectæ O2 + O5 + OZ superant rectas FP + FN + FS excessu AO + OE + OC: recta quoque FY superat rectam O3 excessu OD, & recta FV superat rectam O4 excessu OB; & ideo FY + FV superat O3 + O4 excessu OD + OB; cumque in serie quantitatum O2 + O5 + OZ, FP + FN + FS, FY + FV, O3 + O4, summa extremorum O2 + O5 + OZ + O3 + O4 sit æqualis summæ mediorum FP + FN + FS + FY + FV; erit differentia inter primam & secundam nempe OA + OE + OC æqualis differentiæ inter tertiam & quartam nimirum OB + OD, quod demonstrandum erat.

PROP. 70. THEOREMA.

Si circulus parabolam in pluribus punctis secuerit, e quibus in axem ex vtraque parte rectæ perpendiculares demittantur; erit ea ab vna parte axis æqualis illis ab altera parte: quod si ab utraque parte in duobus punctis illam secet; erunt similiter duæ ab vna parte simul æquales duabus ab altera parte simul.

SIt parabola PABCG quam secet circulus in punctis P, A, B, C, quorum nullum est parabolæ vertex. a punctis P, A, B, C, demittantur in axem eidem ordinatim applicatæ AH, BX, MC, PN: dico ordinatim applicatas ex vna parte axis nempe AH, PN, æquales esse ordinatim applicatis ex altera parte axis nimirum rectis BX, CM. Producantur rectæ PA, BC, donec concurrant in D; eritque rectangulum BDC æquale rectangulo ADP, & igitur rectæ parabolam PABCG tangentes parallelæ rectis DC, DP, æquales erunt, quæ igitur se mutuo intersecent in parabolæ axe, facientes cum eidem ordinatim applicatis triangula isoscelia; & igitur DP, DC, illis parallelæ faciunt cum eisdem ordinatim

natim applicatis triangula isosceelia nempe DLB, DGP; anguli ergo DBL, DPZ, sunt æquales, sed & anguli ABD, DPC, sunt æquales, & ideo anguli ABO, CPZ, sunt æquales, triangula igitur rectangula AOB, CZP, sunt similia, & proinde

OB : OA : : PZ : ZC
OB : OA : : R : SO
Sit R latus rectum parabolæ PZ : ZC : : R : SO
PZ : ZC : : R : ZG
R : SO : : R : ZG

Sunt igitur æquales SO, ZG, & proinde eadem est differentia inter AH primam & BX seu SX secundam, quæ inter

CM tertiam & PN seu G N quartam; & ideo summa primæ & quartæ AH+PN est æqualis summæ secundæ & tertiæ BX + MC, quod demonstrandum erat.

Alii sunt huius theorematis casus, sed in reliquis nulla restat difficultas, modo hic intelligatur.

Hoc theorema inseruit cognitioni æquationis cubicæ & quadratoquadraticæ, præcedens autem æquationibus amphibologiis, & sinuum compositioni; qui autem desiderat plenam analyseos & æquationum doctrinam, expectet absolutissimum D. Caroli Renaldinii opus de Resolutione & Compositione Mathematica, quod nunc est sub prælo.

Hucusque continuavimus speculationes purè geometricas; vt autem videant philosophi geometriam non esse adeo abstractam & inutilem sicut vulgo existimatur, statuimus difficultates quasdam phsiycomathematicas ex principiis opticis geometricè enodare.

DE SIDERVM SCINTILLATIONE & magnitudine apparente.

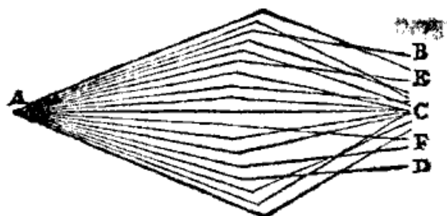
EX optica nostra promota evidens est primo, omnem visionis confusionem provenire ex radiorum vnius puncti in retinæ sensibilem particulam incidentia; secundo, quo maior fuerit ista retinæ particula eo maiorem esse visionis confusionem.

PROPOSITIO I.

Oculus humanus non potest esse Geometricè perfectus.

SIt punctum aliquod radians A; si oculus humanus esset geometricè perfectus, congregaret omnes radios puncti radiantis A in pupillam incidentes in vnum retinet punctum geometricum nempe C: ut autem hoc fieret, oporteret vt oculus esset figuræ alicuius geometricæ, sed figuræ

guræ geometricæ in indiuiſibili conſiſtunt ; & proinde in corporibus humanis, quæ quotidianis mutationibus ſunt obnoxia, locum habere non poſſunt, ideoque oculus



cum talis figuræ eſſe non poſſit non eſt geometrice perfectus, & igitur radios à puncto A prouenientes non congregat in vnicum punctum C, ſed in aliquam ſuperficiem nempe B C D.

PROPOSITIO 2.

Propoſitum ſit inquirere, quid efficiat hæc oculi imperfectio.

POſſumus commodiſſime naturam aſſimulare iaculatori perito, qui ſagittas à puncto A in ſcopum C jaculatur; omnibus enim ſuis ſagittis valde exiguum ſcopum C attingere non poteſt, ſed aliquando in parva quadam diſtantia à ſcopo nempe in B ſagittam omittit: vnde euenit ut poſt multas jaculatas ſagittas, circiter ſcopi C punctum medium reperiantur ſagittæ quam plurimæ ſicut ſylvula quædam denſiſſima; at in paulo maiore diſtantia à ſcopo C nempe ſpatijs E, F, rarior omnino inuenitur iſta ſylvula; & in extremitatibus B, D, videtur rariſſima: ita vt generaliter dici poſſit ſylvulam quo magis ad C acceditur eſſe denſiorem, & quo minus eſſe rariorem. Quod ſi adhuc multas alias jaculetur

letur sagittas, densior evadet hæc sylvula & versus medium & versus extremitates, sed semper quo magis acceditur ad C erit densior & quo minus rarior. Eodem modo natura radijs lucidis conatur punctum geometricum C attingere, sed ob suam imbecillitatem seu oculi imperfectionem cogitur à scopo sæpissime aberrare, hoc tamen sicut peritus iaculator euincens, vt radiorum sylvula quo magis acceditur ad medium eo sit densior, & quo minus eo sit rarior: manifestum etiam est quo plures sunt radii, radiorum sylvulam eo esse densiorem, ita tamen ut semper densior sit versus medium quam versus extremitates. Hinc colligimus, si punctum radians A debiliter radiet, ita vt vix percipiatur à sensu densior seu media pars sylvulæ C, reliquas sylvulæ partes rariores & minus illustratas non omnino percipi: quod si fortior sit radiatio, rariores etiam sylvulæ partes nempe E & F perceptibiles devenient, quoniam illustrantur sensibiliter ex suppositione: quod si fortissima sit radiatio, rarissima etiam & extimæ partes, nempe B, D, sensibiles fient: ita vt generaliter dici possit, quò fortior sit radiatio eo maiorem apparere sensui communi syvulam radiorum, seu particulam retinæ ab unius puncti radiis depictam.

PROPOSITIO 3.

Quo lucidius est obiectum, eo confusior est eius visio.

QVo lucidius est obiectum, eo fortior fit radiatio vnius eius puncti radiantis nempe A; & quo fortior fuerit radiatio, eo maior apparet sensui communi pars retinæ à radiis puncti A illustrata, per huius 2; & proinde per 2 petitionem maior apparet visionis confusio: cumque hoc eodem modo demonstrari possit de omnibus obiecti punctis, manifestum est propositum. Quod si pars retinæ ab vnius puncti radius illustrata sit minimum sensibile, distinctissimè videtur obiec-

obiectum & nulla apparet confusio, vt ex prima huius petitione necessario sequitur.

PROPOSITIO 4.

Eiusdem obiecti confusior est visio in tenebris, quam in luce.

IN tenebris oculi retina a multis radiis non illustratur, & ideo levis illa illustratio versus extremitates superficiei B D facilius percipitur quam in luce, cum exilis illa illustratio à fortissimis lucis radijs plane deleatur: & proinde cum retinæ pars ab vnius puncti radiis illustrata maior videatur in tenebris quam in luce, maior erit (per 2 huius petitionem) visionis confusio in tenebris quam in luce, quod est propositum. Alia etiam ratio esse potest, quod in tenebris maxime dilatetur oculi pupilla, & ideo maior est obiecti in retinam radiatio; & proinde per huius 3 maior etiam visionis confusio. Tertia ratio est, quod in magna pupillæ dilatatione plurimi sint radii extrauagantes, vnde confusa etiam oritur visio.

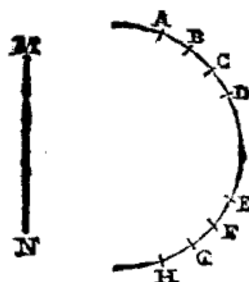
PROPOSITIO 5.

Quo confusior est obiecti visio, eo maior est obiecti magnitudo apparens.

SIt visibile M N, oculi retina A H; supponatur in retina A H depingi confusam imaginem visibilis M N, ita vt radii puncti extremi M incidant in retinæ superficiem FG, & radii extremi visibilis puncti N in retinæ superficiem B C; manifestum est magnitudinem visibilis apparentem iudicari secundum quantitatem retinæ BG a radiis totius visibilis illstratæ: quod si cæteris paribus fiet maior imaginis confusio in retina depictæ, radii puncti M non solum incident in superficiem FG, sed in superficiem E H, superficiem F G seu

syl-

ſylvulæ medium vndique cingentem; & radii puncti N non ſolum incident in ſuperficiem B C, ſed in maiorem BC vndique cingentem, nempe AD: & in hac viſione, manifeſtum eſt magnitudinem viſibilis apparentem iudicari ſecundum quantitatem ſuperficiei AH a radiis viſibilis illuſtratæ; eſt autem ſuperficies AH maior ſuperficie BG; & proinde obiectum apparet maius in maiore confuſione quam in minore, quod demonſtrare oportuit.



Atque hæc eſt ratio quod corporum cæleſtium diametri maiores appareant, quando ſunt magis lucida, quam quando ſunt minus lucida; in huius enim tertia demonſtratum eſt obiecta magis lucida (cæteris paribus) magis confuſa videri quam obiecta minus lucida, & nunc demonſtratur obiecta magis confuſa maiora videri (cęteris paribus) quam minus confuſa; & igitur obiecta lucida (cæteris paribus) maiora videntur quã minus lucida. Ex huius etiam 5 demõſtrari poteſt, quod (cęteris paribus) obiecta minora in maiore proportione à confuſione augmentari videantur quam maiora: Sive enim obiectum ſit parvum ſive magnum, ęquale ſemper à confuſione recipit incrementum, at ęquale ad minus maiorem habet proportionem quam ad maius; & proinde ſi obiectum ſit parvum, augmentatur a confuſione in maiore

iore propòrtione quam si esset magnum. ex his concurrentibus causis patet ratio cur Stellæ fixæ videantur, etiamsi in tam vasta distantia sint omnino insensibiles: ob validam enim earum radiationem & in tenebris visionem, confusissime ab oculo videntur, & ob insignem earum paruitatem in maiore proportione ab hac confusione augmentantur, quam si essent maiores; ita vt decies millies forte & amplius maiores appareant, quam in tali distantia videri debent; nullius enim telescopii ope in hunc vsque diem distinctæ & terminatæ videri possunt. ob easdem rationes parua candela in tenebris e longissimo interuallo videri potest magnitudinis satis considerabilis, & sideris instar scintillans. Ex prædictis manifesta fit causa, quare scintillent sidera, aliquibus primo consideratis: primo scintillationem esse obiecti lucidi confusam & tremulam seu mutabilem visionem, aliquando enim videtur obiectum maius, aliquando minus, aliquando lucidius versus vnam partem, aliquando versus aliam: secundo eius causam esse mutationem aliquam seu tremorem in medio, tales enim omnino videmus effectus, cum inter oculum & visibile eleuantur vapores vel exhalationes, cuius ratio in optica versatum non potest latere: tertio notandum est, quod natura dum confusam percipit visionem humores oculi stimulet ad motum seu mutationem aliquam, vt confusioni perceptæ medeatur; cumque natura seu sensus communis distinctam sentit visionem, oculus suos humores a motu impedit, hoc enim rationi, experientiæ, & authoritati est consentaneum. Quod si sensus communis distinctam visionem sentire non potest, dico oculi humores agitari & toto visionis tempore non quiescere; hoc probari potest ex magna lassitudine, quam patitur oculus ex confusa visione; neque existimo esse rationi consentaneum, ut sisteret motus, dum adhuc viget eius causa, nempe confusio percepta. hisce prælibatis, dico scintillationem siderum provenire ex hac humorum mutatione, dum frustra conatur oculus distin-

ctam reddere eorum visionem, motus enim humorum eundem cum motu medii potest exhibere effectum, ut facillime demonstrari potest; probatur; sidera sunt obiecta quæ secundum hactenus demonstrata confusissime videntur, sed visio confusa oculi humores stimulat ad motum, ergo in visione siderum humores oculi mouentur; at ex humorum motu, aliquando videbuntur sidera maiora, aliquando minora, aliquando magis lucida, aliquando minus lucida, aliquando vnius figuræ, aliquando alterius, sed hæc tremula & inconstans visio est scintillatio, & igitur sidera scintillant. ratio etiam evidens est cur Stellæ fixæ magis scintillent, quam alia obiecta; in Stellis enim fixis confusio est adeo notabilis, vt illius ope decies millies maiores videantur quam reuera sunt; quid ergo mirum si confusionum mutatio seu scintillatio in illis sit maxima. Sed contra hanc doctrinam obiiciet forte aliquis, a telescopiis male elaboratis maximam fieri visionis confusionem, sed non maximam scintillationem; respondeo istam confusionem, cum non fiat ab ipso oculo, ab humorum motu vix sensibiliter mutari, & proinde istam scintillationem non esse valde sensibilem; quoniam scintillatio nil aliud est nisi confusionis mutatio, obiicient fortasse adhuc illos qui oculi vitio laborant maximam percipere visionis confusionem, sed plerumque paruam vel nullam scintillationem; respondeo oculi vitium maxime ordinarium esse humorum immobilitatem, & sine humorum vel medii motu nulla potest fieri scintillatio.

QVOD SOL SIT REALITER, ET FORmaliter calidus.

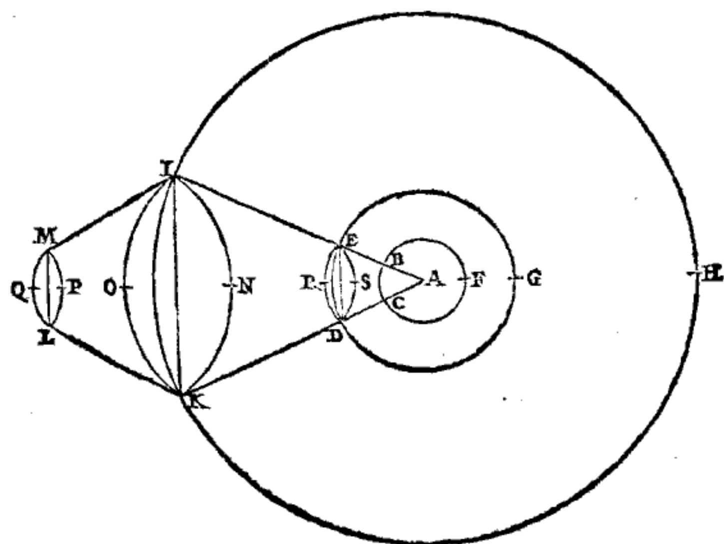
HAec propositio facile potest deduci ex nostris opticæ promotæ demonstrationibus; sed in hoc loco magis accurate & geometricè hanc ipsam probabimus.

PRO-

PROBLEMA.

Ex combustione speculi vel lentis ustorij obseruata; distantiam à Sole invenire, in qua sol suis radijs directis eodem prorsus modo comburit, quo hic comburit speculum vel lens ustorium datum.

SIt sol BCF, cuius centrum A, speculum vel lens vstorium datum INKO omnes radios solares in se incidentes in circulum MPLQ reducens, & in illo combustionem accen-



dens. Supponimus speculum vel lentē INKO esse circulare, cuius axis ad cētrum solis vergit, & proinde conum AIOKN esse rectum. Sit ut IK diameter lentis vel speculi ad LM diametrum circuli combustionis, ita KA vel IA distantia speculi a centro solis ad DA. Dico DA esse distantiam quæsitam, hoc est, solem eodem modo comburere in distantia DA, quo comburit lens vel speculum IOKN in circulo MPLQ.

Per ſpeculi vel lentis IOKN extremitatem; ex centro A fiat ſphęra IONKH; item per punctum D ex eodem centro A fiat ſphęra ERDSG, cuius ſuperficiei portio a coni AIOKN ſuperficie comprehenſa, ſit RESD. Quoniam ſol ex omni parte æqualiter radiat, facile eſt deducere ex 6 definitione 5 elementorũ omnes radios ſolares eſſe ad radios in ſpeculũ vel lentem IOKN incidentes, ut integra ſuperficies ſphęrica ad eius portionem IOKN: ſed ex archimede de ſphęra & cylindro, integra ſuperficies ſphærica eſt ad eius portionem IOKN, vt quadratum diametri ad quadratum chordæ ſemiſſis arcus IK; & proinde omnes radii ſolares ſunt ad radios in ſpeculum vel lentem IOKN incidentes, hoc eſt radios in circulum MPLQ congregatos, ut quadratum diametri ad quadratum chordæ ſemiſſis arcus IK. Eodem modo probatur omnes radios ſolares eſſe ad radios in circulum DRES incidentes, ut quadratum diametri ad quadratum chordæ ſemiſſis arcus DE. ſed quoniam arcus IK, DE, ſunt ſimiles, quadratum diametri circuli IKH eandem habent rationẽ ad quadratum chordæ ſemiſſis arcus KI, quam habet quadratum diametri circuli EDG ad quadratum chordæ ſemiſſis arcus ED; & ideo omnes radii ſolares eandem habẽt rationem ad radios congregatos in circulo LPMQ, quam habent iidem omnes radii ſolares ad radios congregatos in circulo RESD; ſunt igitur radii congregati in circulo LPMQ æquales radiis congregatis in circulo DSER. Deinde ex conſtructione KI eſt ad LM ut KA ad DA; & ob ſimilitudinem triangulorum KAI, DAE; KA eſt ad DA vt KI ad DE; & ideo LM, DE, ſunt æquales; & igitur circuli LPMQ, DSER, ſunt æquales: atque æquales radii in æqualibus ſpatiis eundem producunt effectum; & proinde combuſtio in circulo DRES æqualis eſt combuſtioni in circulo LPMQ, quod demonſtrandum erat.

CON-

CONSECTARIVM.

ATque ratione & experientia constat, quod, eadem speculi vel lentis diametro IK manente, quo minor fuerit circulus combustionis LPMQ, eo maior fit combustionis violentia, nempe (ut nos alibi demonstramus) in circulorum combustionis ratione reciproca: & quo minor est circulus combustionis LPMQ vel illi æqualis DSER, eo brevior est recta DA, seu puncti D à sole distantia, & e contra: ideoque quo propius accedit circulus DSER ad solem, eo maior in circulo est calor, seu combustio; & igitur Sol non est solum virtualiter, sed etiam formaliter calidus, quod demonstrandum suscepi.

DE SOLIS HVMILIS ET SVBLIMIS magnitudine apparente.

ADmirantur nonnulli Solem humilem maiorem apparere etiamsi instrumento astronomico observatus, e contra minor sit eius diameter apparens: quare minor plerumque sit eius diameter apparens prope horizontem quam in loco cœli elevatiore causa in promptu est, quę à nullo astronomo ignoratur, nempe refractio quæ maior est inferioris limbi quam superioris; sed quare tunc nobis maior appareat conabimur hic explicare. Primo itaque sciendum est sensum communem iudicare de visibilis magnitudine, sicuti faciunt geometræ, nempe ex cognitis distantia & angulo visorio, & ideo quo maiorem percipit sensus communis visibilis distantiam, eo cæteris paribus maiorem iudicat visibilis magnitudinem; sed dum Sol existit prope horizontem, iudicat sensus communis maiorem esse solis distantiam quam in loco Cœli elevatiore ob multa corpora interiecta; & ideo prope horizontem iudicat etiam eius magnitudinem ma-

maiorem quam alibi, vbi corpora interiecta non videntur, & proinde de eius magna distantia iudicare non potest. Aliquando tamen ob nubes conuexas inter nos & solem interiectas apparet Sol etiam instrumento obseruatus, multo maior quam ordinario videtur, atque hoc euenit etiam quando Sol est sublimis, sed sæpius quando est humilis ob maiorem nubium frequentium. quæ hic diximus de Sole eodem modo intelliguntur de reliquis corporibus cælestibus.

DE VISIBILIVM PICTVRA sub tecto obscuro.

INtellectis illis quæ demonstrauimus de imaginis natura & loco, facile est percipere, quare pingantur visibilia illustrata in albis obscurati tecti parietibus, si pateat exiguum aliquod foramen in tecto obscurato radiis visibilium liberum præbens transitum. Vnumquodque enim visibilis punctum dirigit conum radiosum intra tectum obscuratum, cuius coni vertex est visibilis punctum, & basis foramen illud exiguum, qui conus producitur vsque ad album & impolitum parietis planum, illic aliam coni radiosi basem describens, à qua illi radii, ob plani inæqualitatem, vndique reflectuntur; cumque hæc coni radiosi in pariete basis oculo appareat sicut punctũ opticum ob foraminis paruitatem, videbuntur omnes radii singulorum visibilis punctorum tectum ingressi a singulis parietis punctis diuergi; cumque hęc sit ipsa imaginis definitio, manifestum est in pariete esse visibilium imagines. Quod si foramen illud sit nimis largum, videtur imago illa confusa, quoniam radii singulorum visibilis punctorum non a punctis parietis opticis, sed a superficiebus sensibilibus diuerguntur. eodem modo si visibile foramen nimis appropinquet, conus productus basem describet in pariete non punctum opticum sed superficiem sensibilem; & ideo imago videtur confusa: idem etiam dicendum

dum esset si paries recederet a foramine. quæ hic loquutus sum de pariete, eodem modo intelligenda sunt de quocunque plano albo & impolito.

DE COMETARVM CAVDIS.

EXistimo plerosque huius seculi philosophos in hoc convenire, quod cometarum materia sit corpus aliquod humidum ex vaporibus & exhalationibus terræ vel alicuius corporis cęlestis genitum; quare autem luceant eorum caudæ omnino controvertitur: existimo tamen hanc opinionem esse maxime receptam, nempe, quod radii solis per refractionem in cometes corpore post eius transitum vniti, caudæ lucentis efficiant similitudinem; cui opinioni non subscribo ob hanc præcipue rationē demōstrativam: omnis lucis vel coloris apparentia provenit à reflectione, sed hic nulla est reflectio, ergo; probatur minor, si hic esset aliqua reflectio, esset reflectio radiorum ex cometæ corpore emersorum ab ipso æthere, sed ab æthere nulla potest fieri reflectio, ergo; probatur minor, æther omnibus consentientibus est corpus maxime diaphanum (hoc est) radiis omnibus a reflectione liberum præbens transitum. Hac igitur funditus eversa, novam stabiliamus sententiam: sed primo animaduertendum est solis absentiam in corporibus præsertim humidis & vaporosis crassas & opacas causari exhalationes, quas sua præsentia omnino dispellit: hoc enim nobis terræ incolis est notissimum; nam tempore nocturno crassus ille aer ab omnibus sentitur, & minus validis præcipue aeri sereno assuetis sæpissime mortaliter nocet: at in zona frigida ob raram solis præsentiam ita sensibiliter incrassescit aer, vt sępissime illic obseruetur refractio horizontalis 4 vel 5 graduum, sicut a nautis batavis commemoratur. deinde considerandum est cometas ex omnium fere consensu esse corpora humida & maxime vaporosa, ex nebulis, fumis vel

ex-

exhalationibus genita, (vel fortasse corpus quodam humidum proprios suos vapores emittens & æthera semper perrerans absque vllo motu circa axem) & ad solem eundem semper fere situm retinentia: hisce positis necessario sequitur medietatem cometæ soli adversam & ab illo nunquam calefactam nec illustratam crassis & valde opacis infestari vaporibus, qui a vaporosa illa cometæ materia & à se mutuo continuo nutriti, nulla vnquam (ob debilem & obliquam Solis lucem) facta ipsorum resolutione, in immensam altitudinem excrescunt, & solis radios non satis validos ad exalationes dispellendas vndique reflectunt. in hac hypothesi istæ exhalationes à radiis Solis illustratæ in longum extensæ apparent sicuti cauda soli semper opposita, sed ob irregularem vaporum ex cometa elevationem, aliquando curvata, & aliquando in vnam, aliquando in alteram cęli plagam deflectens: sicuti eodem fortasse modo appareret in omnibus planetis, si omnes suas partes ad Solem vicissim vertendo, vapores vndique non dispellerentur a validis & directe incidentibus Solis radiis.

Luna existente plena; illustratio terræ a Sole ad illustrationem terræ a Luna, est in ratione composita ex duplicata proportione chordarum Parallaxium horizontalium Solis, ex terra globo, & ex Lunæ globo, obseruati; & ex duplicata proportione chordæ graduum 90 ad chordam parallaxeos horizontalis Lunæ.

Vires (siue illustratio) omnium radiorum solarium in terram incidentium, ad vires omnium radiorum solarium in Lunam incidentium (si in æqualia spatia congregarentur) sunt in ratione duplicata chordarum semiangulorum radiosorum, seu in terminis astronomicis, in ratione duplicata chordarum parallaxium horizontalium Solis, ex terræ globo, & ex Lunæ globo, obseruati, vt in consectario 1. 33. optic: promotæ est demonstratum. Sed quoniam luna

exi-

existente plena, eodem modo illustratur terra à Lunæ hemisphærio radiante, quo illustraretur si vndique radiaret luna; supponamus vndique radiari lunam: supponimus etiam lunam radios solares absque vlla debilitatione & ex omni parte æqualiter reflectere. his suppositis, evidens est vires omnium radiorum solarium in terram incidentium ad semissem virium omnium radiorum lunarium esse in ratione duplicata chordarum parallaxium horizontalium solis ex terra & ex luna, supposito semper vtriusque radios in ęqualia spatia congregari: atque vires omnium radiorum lunarium sunt ad vires omnium radiorum lunarium in terram incidentium, in duplicata ratione chordarum, semicirculi & parallaxeos horizontalis lunæ, radiis scil. in spatia æqualia congregatis: & sumendo antecedentium dimidia, semissis viriū omnium radiorum lunarium est ad vires omnium radiorum lunarium in terram incidentium, in duplicata ratione chordarum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunæ: patent ergo sequentes analogiæ; vires omnium radiorum solarium in terram incidentium sunt ad semissem virium omnium radiorum lunarium, in ratione duplicata chordarum parallaxium solis ex terra & ex luna horizontalium; deinde semissis virium omnium radiorum lunarium est ad vires omnium radiorum lunarium in terram incidentium, in duplicata ratione chordarum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunæ, radiis semper in æqualia spatia congregatis: at radii solares & lunares in terram incidentes in æqualia spatia congregantur, nempe terræ hemisphæria. Supponatur quoque terræ hemisphærium a semisse omnium radiorū lunarium etiam illustrari, eruntque terræ hemisphęriorum, a radiis solaribus, a semisse omnium radiorum lunarium, & a radiis lunaribus sibi debitis, illustrationes, in eisdem rationibus cum viribus radiorum eadem hemisphęria illustrantium: proportiones igitur prædictæ ita se habent; illustratio terrę a sole est ad illustrationem terrę a semisse radiorū

lunarium, in ratione duplicata chordarum parallaxium horizontalium ſolis ex terra & ex luna; deinde illuſtratio terrę a ſemiſſe radiorum lunarium eſt ad illuſtrationem terrę a luna in ratione duplicata chordarum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunę: at illuſtratio terrę a ſole eſt ad illuſtrationem terrę a luna, in ratione compoſita ex proportione illuſtrationis terrę a ſole ad illuſtrationem terrę a ſemiſſe radiorum lunarium, & ex proportione illuſtrationis terrę à ſemiſſe radiorum lunarium ad illuſtrationem terrę a luna; quę proportiones eędem demonſtratę ſunt cũ duplicata proportione chordarum parallaxium horizontalium ſolis ex terra & ex luna, & duplicata proportione chordarum 90 graduum & parallaxeos horizontalis lunæ, quod demonſtrare oportuit.

Eodem prorſus modo demonſtratur hoc generale Theorema.

Quolibet planeta exiſtente pleno; illuſtratio vel calefactio terræ à Sole eſt ad illuſtrationem vel calefactionem terræ ab illo planeta, in ratione compoſita ex duplicata ratione chordarum, parallaxium horizontalium ſolis, ex terra & ex prædicto planeta obſervati, & ex duplicata ratione chordæ graduum 90 ad chordam parallaxeos horizontalis illius planetæ.

DE STELLARVM FIXARVM DISTANTIA.

IN ſtellis fixis nulla obſeruari poteſt parallaxis; & ideo de earum diſtantia multa abſque vllo fundamento dicuntur; ego certe exiſtimo illam eſſe maximam, neque fortaſſe abſque omni ratione, ſicut nunc patebit.

Certum eſt terram & omnes planetas eſſe corpora obſcura & aliena ſola luce fulgentia, item ſolem & omnia ſidera fixa eſſe lucida & proprio tantum fulgore ſplendentia; hæc enim ex multis & certiſſimis phænomenis ſunt manifeſta. Cumque Sol & ſtellæ fixæ ſint ſola vniuerſi corpora lucida,

cida, eiuſdem generis cenſeri poſſunt; ita vt Sol quodammodo dici poſſit ſtella fixa vicina; & ſtellæ, ſoles longinqui: hiſce conſideratis non erit probabile noſtram ſtellam fixam vicinam, ſeu Solem, inter tot millia eſſe omnium fixarum maximam & lucidiſſimam; poſſumus igitur haud abſurdè affirmare vnam ſaltem ſtellam fixam (nempe ſyrium, quæ nobis omnium maxima & lucidiſſima apparet) ipſum ſolem & in ſplendore & magnitudine æquare: atque ſyrius in ſplendore inferior eſt Ioui in ſitu acronychio, ſed vt euidentius fiat noſtrum propoſitum, ſupponamus lucem ſyrii luci Iouis eſſe æqualem: ſed lux ſolis eſt ad lucem Iouis in ſitu acronychio in ratione compoſita ex duplicata ratione chordarum parallaxium horizontalium ſolis ex terra & ex Ioue obſeruati, & ex duplicata ratione chordæ graduum 90 ad chordam parallaxeos horizontalis Iouis, vt patet ex antecedente; & ideo lux ſolis eſt ad lucem ſyrii in eadem ratione: parallaxis autem ſolis horizontalis ex terra obſeruati ſecundum pleroſque eſt $3'$: & ſemidiameter apparens Iouis in ſitu acronychio (hoc eſt parallaxis horizontalis terræ ex Ioue in ſitu acronychio obſeruatæ) eſt $22''$; cumque in hoc ſitu diſtantia terræ a ſole ad diſtantiam Iouis a ſole vulgo ſit vt 10 ad 52; erit diſtantia ſolis a Ioue ad diſtantiam terræ a Ioue, vt 52 ad 42; & proinde horizontalis parallaxis ſolis ex Ioue obſeruati eſt $18''$: cumque in paruis angulis arcus inter ſe ſint vt chordæ, chorda parallaxeos horizontalis ſolis ex terra obſeruati ad chordam parallaxeos horizontalis ſolis ex Ioue obſervati eſt in ratione $3'$ ad $18''$, ſeu ut 180 ad 18 vel vt 10 ad 1, cuius ratio duplicata eſt 100 ad 1. deinde chorda graduum 90 (poſito radio 100000) eſt 141421: cumque diſtantia Iouis a Sole ad diſtantiam terræ a Sole ſit in ratione 52 ad 10 & Solis parallaxis horizontalis ſit $3'$, manifeſtum eſt Iovis parallaxem horizontalem eſſe $35''$, cuius chorda eſt 17, poſito etiam radio 1000000; & ideo chorda graduum 90 eſt ad chordam parallaxeos horizontalis Iovis ut 141421

ad 17 seu ut 8319 ad 1, cuius ratio duplicata est 69205761 ad 1; illustratio igitur terræ a Sole est ad illustrationem terræ a Syrio in ratione cõposita ex proportione 100 ad 1 ex & proportione 69205761 ad 1, hoc est in ratione 6920576100 ad 1; cumque Sol & Syrius supponantur esse eiusdem magnitudinis & splendoris, manifestum est illustrationem terræ à Sole ad illustrationem terræ a Syrio esse in duplicata ratione chordarum semiangulorum radiosorum Solis & Syrii in terram, hoc est parallaxium Solis & Syrii ex terra horizontalium; & ideo chorda parallaxeos horizontalis Solis est ad chordam parallaxeos horizontalis Syrii in subduplicata ratione 6920576100 ad 1, seu in ratione 83190 ad 1, sed in his parvulis angulis chordæ inter se sunt ut sinus, sinus ergo parallaxes horizontalis solis est ad sinum parallaxeos horizontalis Syrii, vt 83190 ad 1, sed Sol & Syrius eiusdem supponuntur magnitudinis, & ideo eorum distantię à terra inter se sunt in reciproca ratione sinuum parallaxium horizontalium; & proinde distantia Syrii a terra ad distantiam Solis a terra est ut 83190 ad 1; & ideo distantia Solis a terra ad distantiam Syrii à terra non est in ratione sensibili, quod demonstrare oportuit.

Quod si assumatur parallaxis horizontalis Solis minor quam 3' (certissimum enim est eam minorem esse vno minuto) magis adhuc insensibilis erit dicta proportio: Nos autẽ non existimamus omnes fixas æqualiter distare a Sole, nam probabile est quarundem distãtias aliarum multis vicibus superare. Existimet forte aliquis meum argumentum non concludere, quoniam fortassis omnes radii solares in Iovem incidentes ab eo non reflectuntur, sicut ego suppono: respondeo tamen argumentum esse à fortiore, quo enim pauciores supponuntur radii a Iove reflecti, eo magis insensibilis erit prædicta proportio, ut cuivis computanti patebit.

QVOD VISIO OPE TELESCOPII vel microſcopij non ſit fallax.

RErum opticarum non ſatis periti ſemper exclamant teleſcopia & microſcopia viſum ſolũmodo decipere & nihil verum & reale nobis monſtrare, neque evidentiſſimis experientiis omnino convinci poſſunt; & igitur ratione tentandum eſt illos ad veritatem revocare. Viſus fallacia poteſt duobus modis accipi, primò & valde improprie, quando viſibile eodem modo videtur in vna diſtantia, quo in alia videri debet; hoc enim abſolute non poteſt dici viſus fallacia, etiamſi reſpectiue ad iſtam diſtantiam ita dici poterit, in alia enim diſtantia eſt vera & debita viſio: atque in hac acceptione viſio per teleſcopium vel microſcopium omnino eſt fallax. Secundo & propriè, viſus fallacia eſt quando viſibile vel eius pars aliqua non apparet in propria ſua figura, ſitu, & propriis ſuis coloribus tinctum: atque in hac acceptione nulla ineſt fallacia viſioni per teleſcopium vel microſcopium perfectum, quæ hominis viſioni perfectiſſimæ non ineſſe poteſt: in 50 enim & 51 opticæ promotæ geometricè demonſtratur, quod omnis viſio per lentes vel ſpecula, ſit viſio vera & realis in tali aſſignata diſtantia nudo oculo debita; ſi igitur nulla ſit fallacia in viſione oculi nudi, nec vlla erit in viſione per teleſcopium vel microſcopium, cum illæ viſiones demonſtrentur eſſe eędem. Sed dicet forte aliquis teleſcopium vel microſcopium repræſentare aliquando viſibile in ſitu euerſo, ſed oculus ita nunquam facit, ergo: reſpondeo in hoc caſu teleſcopium vel microſcopium repræſentare viſibile eodem modo quo appareret oculo nudo & everſo in tali aſſignata diſtantia, vt facilè videtur ex 50 & 51 opt. prom: ſiue enim obiecti, ſive oculi euerſio, nihil mutat, præter merum ſitum quo ad nos, nec in viſione nec in viſibili.

QVOD

QVOD OMNE VISIBILE IN infinitum sit divisibile.

SI visibile in infinitum non sit divisibile, accipiatur minima eius pars, quæ ex opt: prom: 55 vel 56 oculo repræsentetur in angulo aliquo visorio sensibili ex. g. 20 graduum; atque oculus percipit visibile in angulo visorio 20 graduum in multas partes diuisibile, & proinde apparet hæc minima visibilis pars oculo in multas partes divisibilis; cumque natura homini non det oculos fallaces, & nec telescopium nec microscopium visum prębeat magis fallacem quam ipse oculus; necessario sequitur quod ista minima pars sit realiter diuisibilis, quod est absurdum, ponitur enim indivisibilis; & igitur non potest dari visibilis pars minima, est igitur omne visibile in infinitum divisibile, quod demonstrare oportuit.

DE OBSERVATIONE SIMILITVDInis inter Terram & Lunam.

HIsce temporibus magna est controuersia, num Lunæ globus sit ex terra & aqua, sicut noster hic globus terrestris; quæ facili experientia sit dirimi potest. Sit telescopium cuius lens obiectiua in latitudine ad minimum continens centies diametrum uveæ obseruatoris, ex vna parte plana & ad alteram convexa ex diametro 50 palmorum; sitque eius ocularis plana ex vna parte & ex altera $\frac{1}{2}$ palmi conuexitatis. Huius telescopii ope videbitur Luna (supposita eius à terra distantia 240000 mille passuum) omnino sicut ex distantia 2400 mille passuum. Deinde in loco aliquo eminentissimo (ex quo videri possunt maria, montes, prata, lacus, saxa, omnia vastissima, ad distantiam 40 mille passuum) & sub tecto vasto ad vltimum obscurato, dempto vno solum-

lummodo parvo foramine versus prædicta maria, montes, &c, a descripti telescopii lente oculari impleto, per quam obseruentur antedicta maria, montes, &c. (dum à Sole fortiter illustrantur) ab oculo 61 palmis distante à lente, videbuntur omnino sicut ex distantia 2400 mille passuum, ex qua etiam distantia videbatur Luna; & proinde similitudines & dissimilitudines inter Lunam & Terram ab obseruatoribus videri poterunt. Huius praxeos demonstratio est ex opticæ promotæ 50 & 51; ex illis enim deducitur æqualis distantia & illustratio distantię debita vtriusque visibilis, & est in utroque aliqua vitri tinctura. Sed dicet aliquis lunam hac ratione plus habere tincturæ vitreæ quam terra, quoniam illius radii duo penetrant vitra, huius vero solummodo, vnum; cui facile medetur, addendo in observatione terræ vnum vitrum ex vtraque parte planum eiusdem cum lente telescopii obiectiua crassitiei, ad alteram lentem ex parte plana iunctum; dicet adhuc aliquis vapores terrestres, vel terræ obseruationem omnino impedire, vel saltem eius colores mutare: respondeo quod terra obseruari debeat e loco altissimo & tempore sereno, & Luna dum prope horizontem existit, vt idem semper in vtraque obseruatione defectus adsit. hisce consideratis, si luna appareat terra splendidior; dicendum est Lunam terra esse candidiorem & omnino opacum, quoniam nigredo & diaphaneitas reflectionis vires impediunt: Si vero contrarium videatur, contraria ferme sunt iudicanda: si eadem in vtraque obseruatione appareant phænomena, nulla ratio nos docet telluris & Lunæ materias esse diuersas. Eadem quoque methodo potest experientia fieri de similitudine inter duos quoslibet planetas, inter Solem & Stellas fixas, inter nubes & cometas.

F I N I S.